APROXIMACE KŘIVEK V MATLABU – NEWTONŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM

CURVE FITTING IN MATLAB – NEWTON INTERPOLATION POLYNOMIAL

Jiří Kulička[1]

Anotace: Článek se zabývá odvozením, algoritmizací a popisem konstrukce Newtonova interpolačního polynomu. Jsou zde popsány a vysvětleny základní výpočetní postupy týkající se této problematiky, nejprve je proveden teoretický rozbor, pak následuje řešený příklad a výpisy funkcí v Matlabu s vysvětlujícím komentářem.

Klíčová slova: Newtonův interpolační polynom, algoritmizace, Matlab

Summary: The article deals with derived, algorithm design and description of the Newton interpolation polynomial. There are described and explained the basic computational procedures regarding this issue, first is always a theoretical analysis, followed by solved examples and extracts functions in Matlab with explanatory commentary.

Key words: Newton interpolation polynomial, algorithms, Matlab

1. ÚVOD

Tento příspěvek navazuje na seriál tří článků v elektronickém časopise Media4u Magazine, které vyšly v posledních dvou vydáních a naleznete je na adrese: http://www.media4u.cz.

U Lagrangeova polynomu neexistuje žádný vztah mezi $L_{N-1}(x)$ a $L_N(x)$. Každý z polynomů musíme konstruovat individuelně. Postup je sice jednoduchý, ale výpočet je velmi náročný na počet jednotlivých kroků. Když mezi známé uzly přibude další, musíme celý polynom přepočítat. Tyto nevýhody částečně eliminuje Newtonova interpolace. Naším úkolem bude nalézt interpolační polynom N-tého stupně pro funkci $f(x)$ určenou množinou bodů $[x_k, y_k] = [x_k, f(x_k)]$, pro $k = 0,1, \cdots N$. V ukázkách m-souborů z Matlabu jsou za znakem % uvedeny vysvětlující komentáře.

2. NEWTONŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM

Jeho konstrukci lze popsat rekurentně:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0)$$
$$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$
$$P_3(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

[1] Mgr. Jiří Kulička, Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Katedra informatiky v dopravě, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Tel.: +420466 036 428, E-mail: jiri.kulicka@upce.cz

⋮

$P_N(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \cdots + a_N \cdot (x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{N-1})$

Polynom $P_N(x)$ se nazývá Newtonův s N středy $x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}$ a je vyjádřen pomocí $P_{N-1}(x)$ rekurentním vztahem:

$P_\mathrm{N}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}(\mathrm{x}) + \mathrm{a}_\mathrm{N} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \cdot \cdots \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{N}-1})$

2.1 Příklad 1

Jsou dány středy $x_0 = 1{,}5$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4{,}5$; a koeficienty $a_0 = 4$; $a_1 = -1$; $a_2 = -0{,}5$; $a_3 = 0{,}1$; $a_4 = 0{,}007$. Nalezneme $P_k(x)$ a vypočteme $P_k(3{,}5)$ pro $k = 1{,}2{,}3{,}4$.

$P_1(x) = 4 - 1 \cdot (x - 1{,}5)$
$P_2(x) = P_1(x) - 0{,}5 \cdot (x - 1{,}5) \cdot (x - 2)$
$P_3(x) = P_2(x) + 0{,}1 \cdot (x - 1{,}5) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$
$P_4(x) = P_3(x) + 0{,}007 \cdot (x - 1{,}5) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4{,}5)$

Výpočet hodnot polynomů pro $x = 3{,}5$:

$P_1(3{,}5) = 4 - 1 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) = 2$
$P_2(3{,}5) = 2 - 0{,}5 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) \cdot (3{,}5 - 2) = 0{,}5$
$P_3(3{,}5) = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) \cdot (3{,}5 - 2) \cdot (3{,}5 - 3) = 0{,}65$
$P_4(3{,}5) = 0{,}65 + 0{,}007 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) \cdot (3{,}5 - 2) \cdot (3{,}5 - 3) \cdot (3{,}5 - 4{,}5) = 0{,}6395$

2.2 Výpočet hodnoty funkce pomocí vnořeného násobení

Vnořené násobení je výhodné použít v tom případě, když potřebujeme častokrát vypočítat hodnotu polynomu $P_N(x)$. Například pro polynom třetího stupně vypadá předpis takto:

$$P_3(x) = \big((a_3 \cdot (x - x_2) + a_2) \cdot (x - x_1) + a_1\big) \cdot (x - x_0) + a_0.$$

Výpočet hodnoty $P_3(x)$ pro dané x pak vypadá takto:

$S_3 = a_3$
$S_2 = S_3 \cdot (x - x_2) + a_2$
$S_1 = S_2 \cdot (x - x_1) + a_1$
$S_0 = S_1 \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \mathrm{a}_0$

Hodnota v S_0 odpovídá $\mathrm{P}_3(\mathrm{x})$

2.3 Příklad 2

Vypočteme $P_3(3{,}5)$ v příkladu 1 pomocí vnořeného násobení.

$P_3(3{,}5) = \big((0{,}1 \cdot (3{,}5 - 3) - 0{,}5) \cdot (3{,}5 - 2) - 1\big) \cdot (3{,}5 - 1{,}5) + 4$
$S_3 = 0{,}1$
$S_2 = 0{,}1 \cdot (3{,}5 - 3) - 0{,}5 = -0{,}45$
$S_1 = -0{,}45 \cdot (3{,}5 - 2) - 1 = -1{,}675$
$\mathrm{S}_0 = -1{,}675 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) + 4 = 0{,}65$
$\mathrm{P}_3(3{,}5) = 0{,}65$

3. APROXIMAČNÍ POLYNOM, PÓLY A STŘEDY

Potřebujeme nalézt koeficienty $\{a_k\}$ pro všechny polynomy $P_1(x), \cdots, P_N(x)$, které aproximují funkci $f(x)$. $P_k(x)$ prochází uzly $x_0, \cdots, x_{k+1}$. Pro případ $k = 1$ platí: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1(x_1) = f(x_1)$

Určíme a_0 a a_1:

$$f(x_0) = P_1(x_0) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = a_0$$

Proto $a_0 = f(x_0)$

$$f(x_1) = P_1(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1 \cdot (x_1 - x_0)$$

Odtud určíme

$$a_1 = \frac{\big(f(x_1) - f(x_0)\big)}{(x_1 - x_0)}$$

Vidíme, že a_1 je směrnice sečny procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$. Koeficienty a_0 a a_1 jsou stejné jak pro $P_1(x)$, tak pro $P_2(x)$.

Dosadíme x_2:

$$f(x_2) = P_2(x_2) = a_0 + a_1 \cdot (x_2 - x_0) + a_2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)$$

a odtud vyjádříme a_2

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0) + a_2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0) = a_2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)$$

Po vydělení výrazem $(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)$ a následném krácení dostáváme vztah:

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \cdot \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)$$

Výrazy v závorce tohoto výrazu nazýváme poměrné diference.

4. POMĚRNÉ DIFERENCE

Formální označení aproximačního polynomu zjednodušíme, když zavedeme tzv. poměrné diference. Jsou definovány následovně:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$$

$$f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}$$

Rekurzivní formule pro poměrné diference vyšších řádů je:

$$f\big[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \cdots, x_k\big] = \frac{f\big[x_{k-j+1}, \cdots, x_k\big] - f\big[x_{k-j}, \cdots, x_{k-1}\big]}{x_k - x_{k-j}}$$

Koeficienty a_k polynomu $P_N(x)$ závisí na hodnotách $f(x_j)$, pro $j = 0,1,\cdots,k$ a vypočítáme je pomocí poměrných diferencí: $\mathrm{a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}$

5. NEWTONŮV POLYNOM

Předpokládejme, že $x_0, x_1, \cdots, x_N$ je $N+1$ různých čísel v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje jediný polynom $P_N(x)$ stupně nejvýše N, pro který platí: $f(x_j) = P_N(x_j)$ pro $j = 0,1,\cdots,N$. Newtonův polynom je dán předpisem:

$$P_N(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \cdots + a_N \cdot (x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{N-1})$$

kde $a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$, $k = 0,1,\cdots,N$.

Protože $\{[x_j, y_j]\}_{j=0}^{N}$ je množina bodů s různými x-ovými souřadnicemi, hodnoty $y_j = f(x_j)$ můžeme použít k sestavení jediného polynomu stupně menšího nebo rovno N, který prochází $N+1$ body. Poměrné diference je vhodné uspořádat do tabulky, ukázku pro 5 pólů vidíme v tabulce 1. Pro algoritmizaci je pak vhodné výpočet uspořádat podle tabulky 2.

Tab. 1 - Poměrné diference funkce do 4. řádu

<table>
<tr><th>x_k</th><th>$f[x_k]$</th><th>Poměrné diference 1. řádu</th><th>Poměrné diference 2. řádu</th><th>Poměrné diference 3. řádu</th><th>Poměrné diference 4. řádu</th></tr>
<tr><td>x_0</td><td>$f[x_0]$</td><td rowspan="2">$f[x_0, x_1]$</td><td rowspan="3">$f[x_0, x_1, x_2]$</td><td rowspan="4">$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$</td><td rowspan="8">$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_1</td><td rowspan="2">$f[x_1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f[x_1, x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_2</td><td rowspan="2">$f[x_2]$</td><td rowspan="2">$f[x_1, x_2, x_3]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f[x_2, x_3]$</td><td rowspan="4">$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_3</td><td rowspan="2">$f[x_3]$</td><td rowspan="3">$f[x_2, x_3, x_4]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f[x_3, x_4]$</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td>$f[x_4]$</td></tr>
</table>

Tab. 2 - Poměrné diference v poli D(k,j)

x_k	$f[x_k]$	Poměrné diference 1. řádu	Poměrné diference 2. řádu	Poměrné diference 3. řádu	Poměrné diference 4. řádu
x_0	$f[x_0]$	0	0	0	0
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	0	0	0
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	0	0
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	0
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Poměrné diference uložíme do dvojrozměrného pole $D(k,j)$. Pak $D(k,j) = f\left[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \cdots, x_k\right]$ pro $j \leq k$. Formule pro určení prvku pole je:

$$D(k,j) = \frac{D(k,j-1) - D(k-1,j-1)}{\left(x_k - x_{k-j+1}\right)}$$

Koeficienty a_k jsou diagonální prvky pole D a platí: $\mathrm{a_k} = \mathrm{D(k,k)}$.

6. NEWTONOVA APROXIMACE

Předpokládejme, že $P_N(x)$ je Newtonův polynom použitý k aproximaci funkce $f(x)$, tak že: $f(x) = P_N(x) + E_N(x)$. Jestliže je $f \in C^{N+1}\langle a, b\rangle$ pak každému $x \in \langle a, b\rangle$ odpovídá číslo $c = c(x)$ v $\langle a, b\rangle$ tak, že chybu $E_N(x)$ lze vyjádřit jako:

$$\mathrm{E_N(x)} = \frac{\left((\mathrm{x} - \mathrm{x_0}) \cdot\cdot \cdots \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x_N}) \cdot \mathrm{f}^{(\mathrm{N}+1)}(\mathrm{c})\right)}{(\mathrm{N}+1)!}$$

7. PŘÍKLAD 3

Je dána funkce $f(x) = x^3 - 4 \cdot x$. Sestavíme tabulku poměrných diferencí s póly: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6$ a Newtonův polynom třetího stupně $P_3(x)$ založený na pólech x_0, x_1, x_2, x_3.

Tab. 3 - Výpočet poměrných diferencí v příkladu 3
(koeficienty dosazované do polynomu jsou vyznačeny tučně)

x_k	$f[x_k]$	Poměrné diference 1. řádu	Poměrné diference 2. řádu	Poměrné diference 3. řádu	Poměrné diference 4. řádu	Poměrné diference 5. řádu
$x_0 = 1$	$\mathbf{-3}$					
		$\frac{0+3}{2-1} = \mathbf{3}$				
$x_1 = 2$	0		$\frac{15-3}{3-1} = \mathbf{6}$			
		$\frac{15-0}{3-2} = 15$		$\frac{9-6}{4-1} = \mathbf{1}$		
$x_2 = 3$	15		$\frac{33-15}{4-2} = 9$		$\frac{1-1}{5-1} = \mathbf{0}$	
		$\frac{48-15}{4-3} = 33$		$\frac{12-9}{5-2} = 1$		$\frac{0-0}{6-1} = \mathbf{0}$
$x_3 = 4$	48		$\frac{57-33}{5-3} = 12$		$\frac{1-1}{6-2} = 0$	
		$\frac{105-48}{5-4} = 57$		$\frac{15-12}{6-3} = 1$		
$x_4 = 5$	105		$\frac{87-37}{6-4} = 15$			
		$\frac{192-105}{6-5} = 87$				
$x_5 = 6$	192					

$P_3(x) = \mathbf{-3} + \mathbf{3} \cdot (x-1) + \mathbf{6} \cdot (x-1) \cdot (x-2) + \mathbf{1} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$
$P_3(x) = -3 + 3 \cdot x - 3 + 6 \cdot \mathrm{x}^2 - 18 \cdot \mathrm{x} + 12 + \mathrm{x}^3 - 6 \cdot \mathrm{x}^2 + 11 \cdot \mathrm{x} - 6$
$\mathrm{P}_3(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 4 \cdot \mathrm{x}$

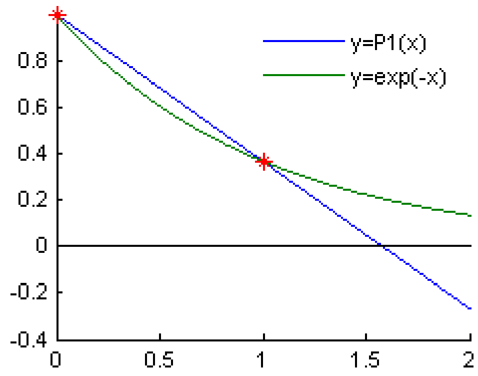
8. PŘÍKLAD 4

Sestavíme tabulku poměrných diferencí funkce $f(x) = e^{-x}$ s pěti póly $[k, e^{-k}]$, pro $k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$. Nalezené koeficienty použijeme pro konstrukci Newtonových interpolačních polynomů $\mathrm{P}_\mathrm{N}(\mathrm{x})$ pro $\mathrm{N} = 1{,}2{,}3$.

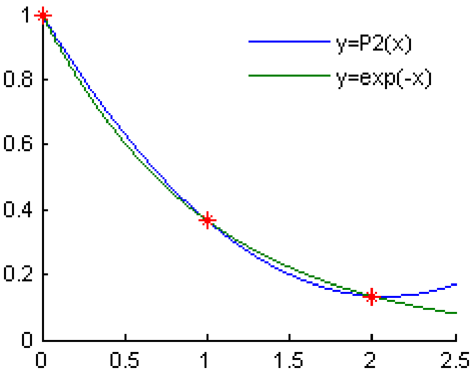
Tab. 4 - Poměrné diference k příkladu 4

x_k	$f[x_k]$	Poměrné diference 1. řádu	Poměrné diference 2. řádu	Poměrné diference 3. řádu	Poměrné diference 4. řádu
0	1				
		-0,632121			
1	0,367879		0,199789		
		-0,232544		-0,042097	
2	0,135335		0,073498		0,00665
		-0,085548		-0,015486	
3	0,049787		0,027039		
		-0,031471			
4	0,018316				

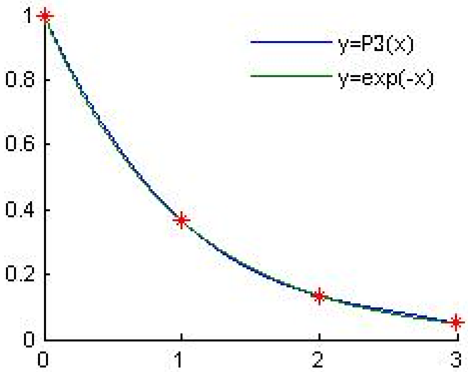
$$P_1(x) = 1 - 0{,}632121 \cdot (x - 0) = -0{,}632121 \cdot x + 1$$
$$P_2(x) = P_1(x) + 0{,}199789 \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) = 0{,}199789 \cdot x^2 - 0{,}83191 \cdot x + 1$$
$$P_3(x) = P_2(x) - 0{,}042097 \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (\mathrm{x} - 2)$$
$$\mathrm{P_3(x)} = -0{,}042097 \cdot \mathrm{x}^3 + 0{,}32608 \cdot \mathrm{x}^2 - 0{,}916104 \cdot \mathrm{x} + 1$$



Obr. 1 - Graf funkce $y = e^{-x}$ a lineární Newtonův polynom $y = P_1(x)$, který je založen na pólech $x_0 = 0$ a $x_1 = 1$



Obr. 2 - Graf funkce $y = e^{-x}$ a kvadratický Newtonův polynom $y = P_2(x)$, který je založen na pólech $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$



Obr. 3 - Graf funkce $y = e^{-x}$ a kubický Newtonův polynom $y = P_3(x)$, který je založen na pólech $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 3$

9. M-SOUBOR MATLAB

Sestrojení Newtonova interpolačního polynomu stupně nejvýše N, procházejícího body $[x_k, y_k] = [x_k, f(x_k)]$, pro $k = 0,1, \cdots N$. $P(x) = d_{0,0} + d_{1,1} \cdot (x - x_0) + \cdots + d_{N,N} \cdot (x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{N-1})$, kde $d_{k,0} = y_k$ a

$$\mathrm{d_{k,j}} = \frac{\left(\mathrm{d_{k,j-1}} - \mathrm{d_{k-1,j-1}}\right)}{\left(\mathrm{x_k} - \mathrm{x_{k-j+1}}\right)}$$

```
function [C,D]=newtonpoly(X,Y)
%vstup   X vektor x-ových souřadnic bodů Xk
%        Y vektor y-ových souřadnic bodů Xk
%výstup C vektor koeficientů Newtonova interpolačního polynomu
%         D matice poměrných diferencí
n=length(X);            %Počet daných bodů
D=zeros(n,n);           %Naplnění matice D nulami
D(:,1)=Y';
%výpočet poměrných diferencí
```

```
for j=2:n
   for k=j:n
  D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
   end
end
% koeficienty Newtonova interpolačního polynomu
C=D(n,n);
for k=(n-1):-1:1
   C=conv(C,poly(X(k)));
   m=length(C);
   C(m)=C(m)+D(k,k);
end
```

příkaz: ***[C,D]=newtonpoly(X,Y)***

10. ZÁVĚR

Newtonův interpolační polynom má tu výhodu, že pro něj oproti Lagrangeově interpolaci je výpočetně méně náročné přidat jeden pól, protože část výpočtů zůstane beze změny. Velká výhoda je také v možnosti rekurentního vyjádření. Uvedené komentované výpisy funkcí v Matlabu budou použity ve výuce předmětu Numerické Metody na DF UPCE.

POUŽITÉ ZDROJE

[1] MATHEWS, John – FINK, Kurtis. *Numerical Methods Using MATLAB.* Pearson Prentice Hall 2004, fourth edition. ISBN 0-13-191178-3.
[2] RALSTON, Antony. *Základy numerické matematiky.* Academia Praha 1978
[3] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody.* SNTL 1987
[4] KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink.* Computer Press 2006. ISBN 80-251-1301-9.