

# MODELOVÁNÍ SYSTÉMU HROMADNÉ OBSLUHY M/M/1/1 S NESPOLEHLIVÝMI LINKAMI

## UNRELIABLE M/M/1/1 QUEUEING SYSTEM MODELLING

Michal Dorda<sup>1</sup>

---

*Anotace: Tento článek se zabývá modelováním nespolehlivého M/M/1/1 systému hromadné obsluhy. Systém je možno modelovat více způsoby, článek uvádí 4 přístupy k modelování tohoto systému. Analytické modely jsou dále doplněny modelem simulačním vytvořeným v simulačním prostředí Witness. V závěru článku jsou představeny výsledky provedených experimentů.*

*Klíčová slova: nespolehlivý M/M/1/1 systém, modelování, simulace*

*Summary: This paper deals with unreliable M/M/1/1 queueing system modelling. We are able to model this system by using more approaches, in the paper are presented 4 models of this system. Analytic models are completed by simulation model created by using simulation software Witness. In the end of this paper there are presented outcomes of performed experiments.*

*Key words: unreliable M/M/1/1 system, modelling, simulation*

### 1. ÚVOD

Při modelování systémů hromadné obsluhy (dále jen SHO) se zpravidla z důvodů zjednodušení popisu tohoto modelu předpokládá, že daný systém pracuje bez poruch, tedy se předpokládá, že nemůže docházet k poruchám obslužných linek. V praxi ovšem tento předpoklad neplatí, neboť jako u každého technického zařízení i u obslužných linek hromadné obsluhy může dojít k poruše, což má za následek dočasný výpadek dané linky z provozu. Systémy s obslužnými linkami, u nichž se uvažuje možnost vzniku poruchy linky, budeme nazývat SHO s nespolehlivými linkami (resp. nespolehlivé SHO). Systémy s nespolehlivými linkami lze obecně modelovat více přístupy, tento článek představuje vybrané analytické přístupy aplikované na Markovův systém hromadné obsluhy netvořící frontu s jednou obslužnou linkou a jejich verifikaci pomocí simulačního nástroje Witness.

### 2. DEFINICE PROBLÉMU

Uvažujme Markovův SHO bez fronty s nespolehlivými linkami tvořený 1 obslužnou linkou. Proud požadavků na obsluhu v systému je Poissonův s parametrem vstupního toku  $\lambda$  (střední počet zákazníků ucházejících se o obsluhu v systému za jednotku času), doba obsluhy jednoho požadavku se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti se střední hodnotou

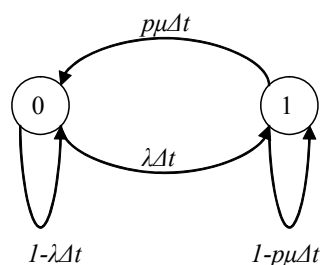
---

<sup>1</sup> Ing. Michal Dorda, VŠB - TU Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, Tel.: +420 597 325 755, e-mail: m.dorda@seznam.cz

$\frac{1}{\mu}$ , z čehož parametr obsluhy (střední počet zákazníků, které je linka schopna obsloužit za jednotku času) je roven  $\mu$ . Proud poruch obslužné linky je rovněž považován za Poissonův s parametrem  $\bar{\lambda}$  (střední počet poruch linky za jednotku času). Doba opravy linky se bude řídit exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti se střední dobou opravy  $\frac{1}{\bar{\mu}}$ . Dále je třeba uvést, že pokud dojde k poruše linky, která právě provádí obsluhu zákazníka, potom tohoto zákazníka považujeme za odmítnutého.

### 3. MODELOVÁNÍ ZALOŽENÉ NA KOREKCI VSTUPNÍCH PARAMETRŮ - 1. PŘÍSTUP

Tento přístup (viz [1]) je založen na korekci vstupních parametrů modelu; známe-li pravděpodobnost úspěšné obsluhy požadavku  $p$  (tj. pravděpodobnost toho, že v průběhu obsluhy požadavku nedojde k poruše linky, která provádí jeho obsluhu; tato pravděpodobnost závisí na vstupních parametrech  $\bar{\lambda}$  a  $\bar{\mu}$ ), můžeme touto pravděpodobností vynásobit parametr obsluhy  $\mu$ . Takto získáme parametr úspěšné obsluhy  $p\mu$ , který udává počet požadavků, které je schopna jedna obslužná linka obsloužit za jednotku času, ovšem za předpokladu, že u dané linky uvažujeme i možnost vzniku poruchy. Tímto postupem se ve skutečnosti prodlužuje střední doba obsluhy jednoho zákazníka, čímž se v systému vytváří určitá rezerva. Je-li  $p = 1$ , dostáváme spolehlivý systém SHO. Přechodový graf tohoto systému je znázorněn na obr. 1.



Zdroj: Autor

Obr. 1 - Přechodový graf modelu SHO získaný 1. přístupem

Řešením systému v podmínkách dlouhodobého provozu získáme stacionární pravděpodobnosti:

$$P_0 = \frac{p\mu}{\lambda + p\mu} \text{ a } P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + p\mu}.$$

Pro pravděpodobnost odmítnutí zákazníka  $P_{ODM}$  a střední počet zákazníků v systému  $EK$  můžeme potom psát:

$$P_{ODM} = EK = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + p\mu}.$$

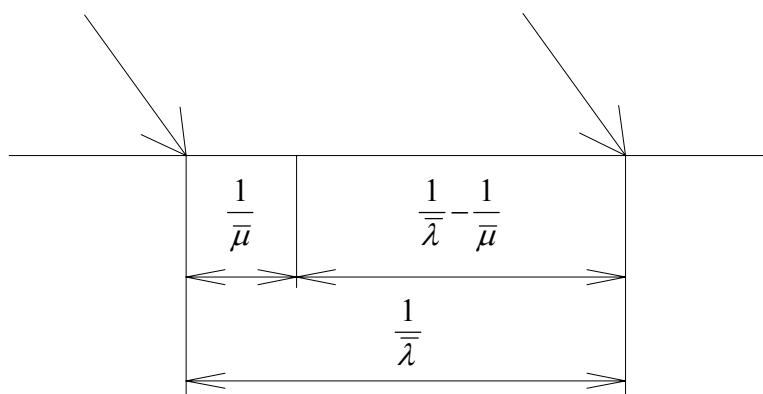
Model vytvořený tímto přístupem se pouze minimálně odchyluje od modelu stejného systému se spolehlivými linkami. Nevýhodou je nutná znalost pravděpodobnosti úspěšné obsluhy pro analytický výpočet. Otázkou je, jak tuto pravděpodobnost stanovit. Není-li tato hodnota předem známa a není-li možno stanovit její hodnotu odborným odhadem, je možno k jejímu stanovení použít v dnešní době poměrně široce rozšířené simulační nástroje. Simulace umožňuje simulovat práci uvažovaného systému hromadné obsluhy a na základě výsledků získaných simulací stanovit hodnotu pravděpodobnosti úspěšné obsluhy  $p$ .

Dále se nabízí otázka, zda není možné nahradit pravděpodobnost úspěšné obsluhy jiným parametrem. Teorie spolehlivosti (viz např. [2]) zavádí pojem součinitel pohotovosti  $A(t)$ , který vyjadřuje poměr celkové doby bezporuchového provozu do času  $t$  k celkové době provozu do stejného času  $t$ . Tento součinitel pro  $t \rightarrow \infty$  konverguje k tzv. ustálenému součiniteli pohotovosti  $A$ , pro který můžeme psát:

$$A = \frac{T_{SP}}{T_{SP} + T_{SO}},$$

kde  $T_{SP}$  ... střední doba bezporuchového provozu [h],

$T_{SO}$  ... střední doba obnovy [h].



Zdroj: Autor

Obr. 2 - Vazba mezi střední dobou mezi poruchami a střední dobou obnovy

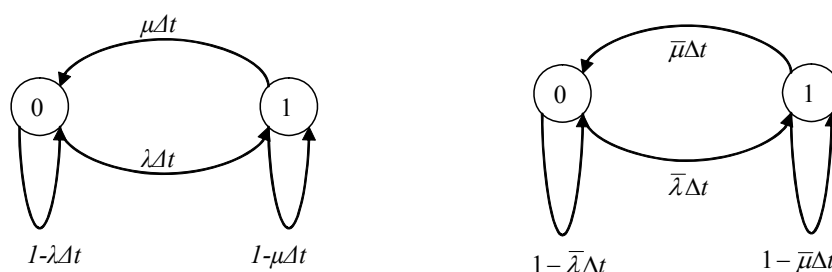
Jelikož pro součet středních hodnot dvou náhodných veličin  $X$  a  $Y$  platí, že  $E(X+Y) = EX + EY$ , potom můžeme v našem případě na základě obr. 2 ustálený součinitel pohotovosti vyjádřit jako:

$$A = \frac{\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\mu}}}{\left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\mu}}\right) + \frac{1}{\bar{\mu}}} = \frac{\bar{\mu} - \bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \quad \text{pro } \bar{\mu} > \bar{\lambda}.$$

Možnost této aproximace bude dále ověřena na konkrétních případech.

#### 4. MODELOVÁNÍ POMOCÍ SEKUNDÁRNÍHO MODELU OPRAVY LINEK - 2. PŘÍSTUP

Tento přístup (viz [1]) ke spolehlivému SHO M/M/1/1 (se vstupními parametry  $\lambda$  a  $\mu$ ) přidává druhý systém, který má stejný počet stavů, přičemž stav druhého systému nepředstavuje počet zákazníků v systému, ale počet obslužných linek, které jsou mimo provoz z důvodu poruchy. Tento přístup dále předpokládá, že jednu linku opravuje jeden technik, přičemž předpokládáme, že celkem máme k dispozici  $l$  techniků, kde  $l < n$ ,  $n$  je počet linek SHO; potom je model opravy linek uzavřeným systémem s  $l$  linkami (techniky) a  $n$  zákazníky (linky v poruše). Jelikož v našem případě předpokládáme, že linka může být opravována 1 technikem, je druhý systém uzavřeným systémem M/M/1/1 se vstupními parametry  $\bar{\lambda}$  a  $\bar{\mu}$ . Na obr. 3 jsou znázorněny přechodové grafy obou systémů.



Zdroj: Autor

Obr. 3 - Přechodové grafy obsluhy zákazníků (vlevo) a opravy linky (vpravo)

Řešením obou systémů v podmínkách dlouhodobého provozu získáme stacionární pravděpodobnosti:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (\text{pravděpodobnosti, že v systému je } k \text{ zákazníků, kde } k \in \{0,1\}) \text{ a}$$

$$\bar{P}_0 = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}, \quad \bar{P}_1 = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \quad (\text{pravděpodobnosti, že } j \text{ linek je v poruše, kde } j \in \{0,1\}).$$

Pro pravděpodobnost odmítnutí  $P_{ODM}$  můžeme v tomto případě psát:

$$P_{ODM} = \frac{\bar{\lambda}(\mu + \bar{\lambda} + \bar{\mu}) + \lambda\bar{\mu}}{(\lambda + \mu)(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}.$$

Pro pravděpodobnost úspěšné obsluhy  $p$  lze psát:

$$p = \frac{\lambda + \mu - \bar{\lambda}}{\lambda + \mu}.$$

Značnou nevýhodou tohoto přístupu je, že počítáme odděleně pravděpodobnosti stavů spolehlivého systému hromadné obsluhy M/M/1/1 a zvlášť pravděpodobnosti stavů uzavřeného systému hromadné obsluhy M/M/1/1 zajišťujícího opravu obslužných linek. Nejsme tedy schopni tímto způsobem určit pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému hromadné obsluhy s nespolehlivými linkami a tedy ani střední počet zákazníků v systému  $EK$ .

Pro odhad  $EK$  lze použít předpoklad statistické nezávislosti stavů prvního systému na stavech druhého systému. Potom bude systém v bezporuchovém stavu a zároveň bude obsluhovat zákazníka s pravděpodobností  $P_1 \cdot \bar{P}_0$ . Pro  $EK$  tedy můžeme psát:

$$EK = P_1 \cdot \bar{P}_0 = \frac{\lambda \bar{\mu}}{(\lambda + \mu)(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}.$$

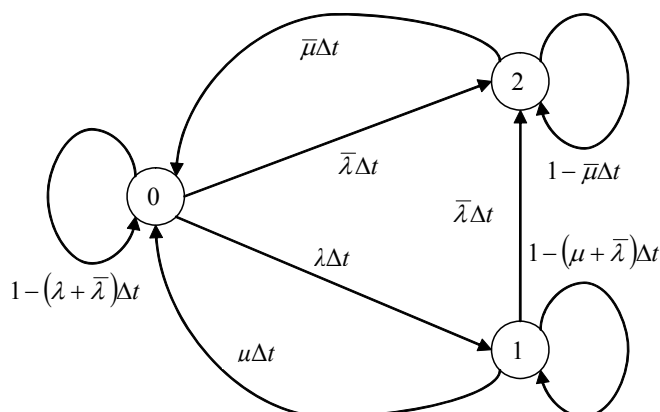
Použití tohoto odhadu bude dále v textu opět ověřeno simulačním experimentem.

## 5. MODELOVÁNÍ POMOCÍ PRIORITNÍCH ZÁKAZNÍKŮ - 3. PŘÍSTUP

Vznik poruchy obslužné linky je modelován prostřednictvím příchodu prioritního zákazníka do systému. Analogicky jako v předcházejících případech je systém zatížen dvěma vstupními proudy - proudem skutečných zákazníků (zákazníků bez priority) a proudem poruch (zákazníků s prioritou). Tento SHO se může vyskytovat ve třech stavech:

- systém je prázdný (stav 0),
- systém provádí obsluhu zákazníka (tedy neprioritního požadavku - stav 1),
- systém je v poruše (tedy provádí obsluhu prioritního zákazníka - stav 2).

Systém si opět znázorníme pomocí přechodového grafu (viz obr. 4).



Zdroj: Autor

Obr. 4 - Přechodový graf modelu SHO získaný 3. přístupem

Řešením systému (viz např. [3]) v podmínkách dlouhodobého provozu opět získáme stacionární pravděpodobnosti jednotlivých stavů:

$$P_0 = \frac{\bar{\mu}(\mu + \bar{\lambda})}{(\lambda + \bar{\lambda} + \mu)(\bar{\mu} + \bar{\lambda})},$$

$$P_1 = \frac{\lambda \bar{\mu}}{(\lambda + \bar{\lambda} + \mu)(\bar{\mu} + \bar{\lambda})},$$

$$P_2 = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}.$$

Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka  $P_{ODM}$  určíme jako:

$$P_{ODM} = 1 - P_0 + \frac{\bar{\lambda}}{(\bar{\lambda} + \mu)^2} P_0.$$

Pro pravděpodobnost úspěšné obsluhy  $p$  můžeme psát:

$$p = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{(\bar{\lambda} + \mu)^2} P_0.$$

Pro střední počet zákazníků v systému  $EK$  platí:

$$EK = P_1 = \frac{\lambda \bar{\mu}}{(\lambda + \bar{\lambda} + \mu)(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}.$$

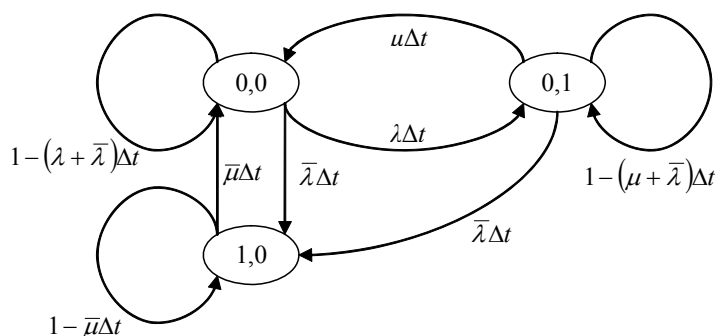
Srovnáme-li tento vztah se vztahem pro odhad  $EK$  u druhého přístupu, tedy  $EK = P_1 \cdot \bar{P}_0 = \frac{\lambda \bar{\mu}}{(\lambda + \mu)(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}$ , potom vidíme, že se liší pouze v prvním členu ve jmenovateli a to v  $\bar{\lambda}$ , u kterého lze ale tvrdit, že bývá v praxi mnohem menší než 1, tudíž konečný výsledek příliš neovlivní. Oběmi vzorci tedy dostaneme velice podobné výsledky.

## 6. MODELOVÁNÍ POMOCÍ DVOUHODNOTOVÉHO POPISU STAVU SYSTÉMU - 4. PŘÍSTUP

Uvažujme, že stav systému je vyjádřen ve tvaru  $i,j$ , kde  $i$  vyjadřuje počet linek v poruše a  $j$  počet zákazníků v systému. Vstupní parametry jsou shodné s předchozími případy. Je zřejmé, že nespolehlivý systém M/M/1/1 se může nacházet pouze v následujících třech stavech:

- 0,0 - linka je v bezporuchovém stavu, systém je prázdný,
- 1,0 - linka je v poruše, systém je prázdný,
- 0,1 - linka je v bezporuchovém stavu, v systému je 1 zákazník (je prováděna jeho obsluha).

Na obr. 5 vidíme přechodový graf tohoto systému.



Zdroj: Autor

Obr. 5 - Přechodový graf nespolehlivého M/M/1/1 systému získaný 4. přístupem

Srovnáním obr. 4 a 5 zjistíme, že oba přechodové grafy jsou ekvivalentní, tedy i analytické řešení tohoto modelu se bude shodovat s řešením systému z kapitoly 5, jenom si je třeba uvědomit, že  $P_{0,0} = P_0$ ,  $P_{0,1} = P_1$  a  $P_{1,0} = P_2$ . Z tohoto důvodu nebylo s tímto přístupem v provedených experimentech uvažováno.

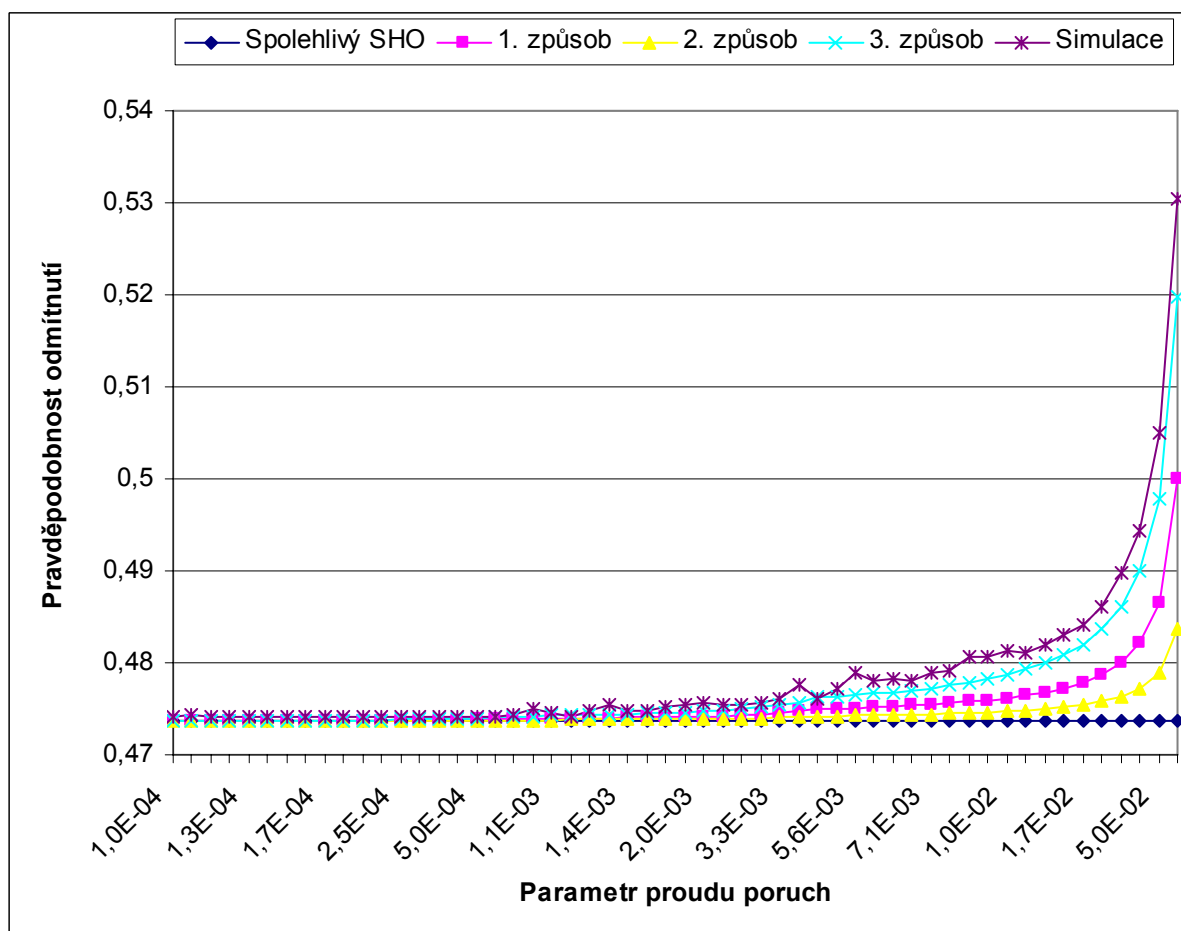
## 7. EXPERIMENTY NA KONKRÉTNÍCH PŘÍPÁDECH

Za účelem komparace analytických výsledků získaných jednotlivými přístupy byly provedeny experimenty na systému s konkrétními parametry  $\lambda = 9 \text{zák} \cdot \text{h}^{-1}$  a  $\mu = 10 \text{zák} \cdot \text{h}^{-1}$ . Parametr opravy linky  $\bar{\mu}$  byl zvolen pevně a to  $\bar{\mu} = 1 \text{linka} \cdot \text{h}^{-1}$  (tedy střední doba opravy linky činí 1 h). Střední doba mezi poruchami  $\frac{1}{\lambda}$  byla postupně skokově měněna následujícím způsobem:

- z maximální hodnoty  $10000 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$  na hodnotu  $1000 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$  se skokem 500,
- z hodnoty  $1000 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$  na hodnotu  $200 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$  se skokem 50,
- z hodnoty  $200 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$  na minimální hodnotu  $10 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$  se skokem 10.

Jelikož u 1. přístupu nebyla známa pravděpodobnost úspěšné obsluhy  $p$ , byla nahrazena při výpočtu ustáleným součinitelem pohotovosti  $A$ . Dále byl tento systém s výše uvedenými parametry simulován v prostředí Witness. Práce systému byla vždy simulována po dobu 2 let.

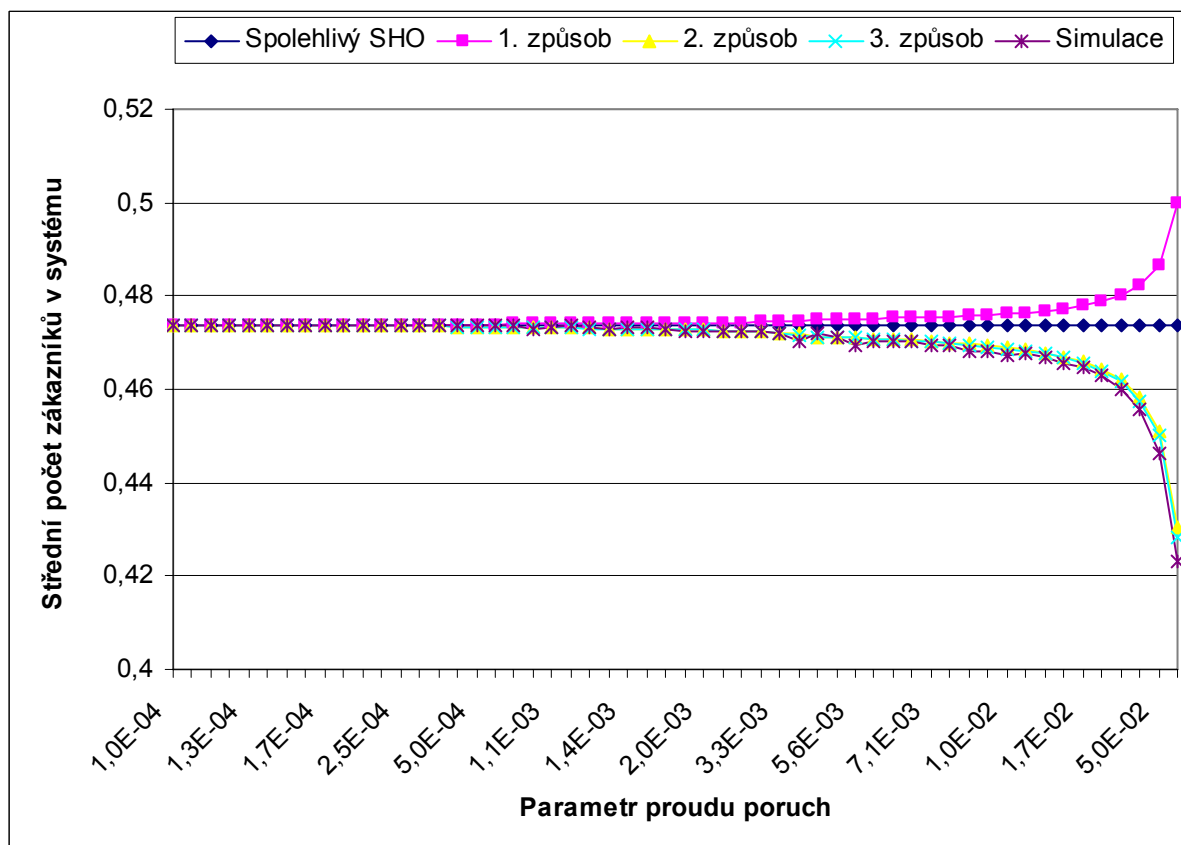
Výsledkem těchto provedených experimentů jsou grafy závislosti pravděpodobnosti odmítnutí a středního počtu zákazníků v systému na parametru proudu poruch  $\bar{\lambda}$  (viz obr. 6 a 7).



Zdroj: Autor

Obr. 6 - Závislost  $P_{ODM}$  na parametru proudu poruch  $\bar{\lambda}$

Z grafu na obr. 6 je patrné, že s rostoucím parametrem  $\bar{\lambda}$  pravděpodobnost odmítnutí roste, což se dalo logicky očekávat. Vidíme, že zhruba do hodnoty  $\bar{\lambda} = 0,002 \text{ por} \cdot \text{h}^{-1}$  je odchylka  $P_{ODM}$  u spolehlivého a nespolehlivého systému zanedbatelná, poté  $P_{ODM}$  u nespolehlivého systému začíná nelineárně růst. Dále vidíme, že průběhu získanému simulací se nejvíce přibližuje průběh získaný 3. způsobem, průběh získaný 2. způsobem se odchyluje nejvíce.



Zdroj: Autor

Obr. 7 - Závislost  $EK$  na parametru proudu poruch  $\bar{\lambda}$ 

Z grafu na obr. 7 je patrné, že s rostoucím parametrem  $\bar{\lambda}$  střední počet zákazníků v systému klesá kromě křivky odpovídající 1. způsobu řešení. Toto se dá snadno vysvětlit, podíváme-li se na vzorec, podle kterého se charakteristika systému  $EK$  v tomto případě počítá a to  $EK = \frac{\lambda}{\lambda + p\mu}$ . Vidíme, že v našem případě jsou parametry  $\lambda$  a  $\mu$  konstantami, mění se pouze hodnoty pravděpodobnosti úspěšné obsluhy (resp. ustáleného součinitele pohotovosti), které s rostoucím  $\bar{\lambda}$  klesají; tedy konstantní čítec dělíme zmenšujícím se jmenovatelem. Lze tedy říct, že 1. přístup není přibližně pro hodnoty  $\bar{\lambda} > 0,002 \text{ por} \cdot \text{h}^{-1}$  k určení  $EK$  nespolehlivého systému vhodný. Dále můžeme tvrdit, že zhruba do hodnoty  $\bar{\lambda} = 0,002 \text{ por} \cdot \text{h}^{-1}$  je odchylka  $EK$  u spolehlivého a nespolehlivého systému zanedbatelná,



poté dochází k nelineárnímu poklesu (mimo 1. přístup). Dále je zřejmé, že průběh získaný simulací zbylé dva přístupy poměrně dobře kopírují.

## 8. ZÁVĚR

Článek předkládá čtyři vybrané přístupy k modelování nespolehlivého M/M/1/1 systému hromadné obsluhy. Teoretická část je věnována analytickému řešení daného nespolehlivého SHO jednotlivými přístupy. V experimentální části článku byly provedeny analytické výpočty základních provozních charakteristik (pravděpodobnost odmítnutí  $P_{ODM}$  a střední počet zákazníků v systému  $EK$ ) konkrétních příkladů SHO; k analytickým výsledkům jsou přidány výsledky získané simulací v prostředí Witness. Výsledkem provedených experimentů jsou grafické závislosti  $P_{ODM}$  a  $EK$  na parametru proudu poruch  $\bar{\lambda}$ . Porovnání výsledků simulačních experimentů s výsledky analytických výpočtů ukázalo, že se jako nejvhodnější analytický přístup k modelování nespolehlivého Markovova jednodlinkového systému hromadné obsluhy bez fronty jeví 3., resp. 4. přístup. Dále bylo experimenty zjištěno, že zhruba pro hodnoty  $\bar{\lambda} > 0,002 \text{ por} \cdot h^{-1}$  je první přístup při nahrazení pravděpodobnosti úspěšné obsluhy ustáleným součinitelem pohotovosti nejméně vhodný.

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] UNČOVSKÝ, L. *Stochastické modely operační analýzy*. Bratislava: ALFA Bratislava, 1. vyd., 1980.
- [2] FAMFULÍK, J. - MÍKOVÁ, J. - KRZYŽANEK, R. *Teorie údržby* [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2007. 237 s. [cit. 2009-03-15]. Dostupné z <<http://homel.vsb.cz/~krz011/>>. ISBN 978-80-248-1509-1.
- [3] PEŠKO, Š. *Operační analýza 2 (Prednášky pre IRS)* [online]. Žilinská univerzita, 2000 - 2001. [cit. 2009-03-15]. Dostupné z <<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/pesko>>.
- [4] KLUVÁNEK, P. - BRANDALÍK, F. *Operační analýza I (Teorie hromadné obsluhy)*. Bratislava: ALFA Bratislava, 1. vyd., 1982.

Recenzenti: doc. Ing. Josef Volek, CSc.  
Univerzita Pardubice, DFJP, Katedra informatiky v dopravě  
doc. RNDr. Antonín Tuzar, CSc.  
ČVUT v Praze, FD, Ústav řízení dopravních procesů a logistiky