MODELOVÁNÍ SYNCHRONIZACE LINEK MHD V PŘESTUPNÍM UZLU

MODELLING SYNCHRONIZATION PUBLIC TRANSPORT LINES IN INTERCHANGE STOP

Richard Turek[1]

Anotace: Příspěvek se zabývá modelováním synchronizace odjezdů spojů z přestupních zastávek pomocí max-plus algebry. Problém přestupu cestujících je formulován pomocí matematického aparátu max-plus algebry. Následuje charakteristika MHD Prostějov a seznámení s operacemi max-plus algebry, kterých je využito při modelování synchronizace linek MHD Prostějov.

Klíčová slova: Synchronizace, přestupní zastávka, modelování, max-plus algebra.

Summary: The paper deals with modelling of the synchronization of departures from the transfer stations using max-plus algebra. The problem of passengers' transfer is formulated using mathematical max-plus algebra. In the next part of the paper there is a characteristic of Prostějov public transport and an introduction to max-plus algebra operations that are used for modelling of the synchronization of public transport lines in Prostějov.

Key words: Synchronization, interchange stops, modelling, max-plus algebra.

ÚVOD

Řešení hromadné osobní dopravy představuje komplex dílčích problémů, které musí být řešeny společně. Klíčovým problémem každého systému MHD je snaha o maximální snížení ekonomické ztrátovosti. S uvedeným problémem velice úzce souvisí ekonomická efektivita rozsahu dopravní sítě MHD především ve vztahu k počtu nasazených vozidel a provozní délce jednotlivých linek, který by korespondoval s požadavky cestující veřejnosti. Jedním z nežádoucích důsledků takovýchto do značné míry protichůdných požadavků může být ztráta možnosti vhodných přestupů mezi spoji některých linek na významných zastávkách sítě.

Existence přímého spojení znamená výhodu pro cestujícího spočívající v tom, že nemusí při svých cestách přestupovat. V důsledku racionalizace však často dochází ke snížení počtu linek, což pro cestující veřejnost představuje zvýšení potřeby přestupovat v některých relacích. Relace bez možnosti přímého spojení jsou charakteristické nižšími intenzitami přepravního proudu v daných relacích a vyšší mírou souběhu linek.

[1] Ing. Richard Turek, Ph.D., Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, Tel.: +420 723 205 261, E-mail: richardturek@seznam.cz

1. MOTIVACE

K řešení problému časové koordinace spojů v přestupních uzlech je možno přistoupit různými způsoby. Nejčastěji je využíván tzv. zkušenostní přístup, kdy pověření zaměstnanci dopravců zajišťují možnosti přestupu na vybraných přestupních zastávkách zpravidla na základě svých logických úvah vyplývajících z historicky vzniklých přestupních vazeb.

Pokročilejší přístup v dopravní praxi v tuzemsku i v zahraničí představují heuristické metody, mezi které patří metoda pravidelných n-segmentů na kružnici známá též jako tzv. úloha o žilinských n-úhelnících a metody založené na lineárním programování, v rámci kterých byl vytvořen matematický model časové koordinace spojů sestavený řešitelským kolektivem Výzkumného ústavu dopravního v Žilině, Černý a kolektiv (1).

S ohledem na výpočtovou sílu solverů a matematického aparátu Max-plus algebry se nabízí možnost rozšíření pokročilejších přístupů prostřednictvím tvorby robustních matematických modelů pro synchronizaci technologických omezení dopravců i požadavků cestující veřejnosti.

2. MAX-PLUS ALGEBRA

Většina problémů v operačním výzkumu zahrnuje hledání optima. Max-plus algebra využívá při formulaci rovnic specifické operace a proto je zajímavým kandidátem pro matematický popis chování diskrétních dynamických systémů.

Max-plus algebra představuje matematický aparát, ve kterém jsou klasické aritmetické operace sčítání a násobení nahrazeny následujícími operacemi

$$a \oplus b = \max(a,b)$$
$$a \otimes b = a + b$$

Uvedený matematický přístup nabízí netradiční způsob vhodný pro modelování systémů diskrétních událostí DES (Discrete Event Systems) a optimalizaci problémů ve výrobě a dopravě. Navíc se ukazuje silná podobnost s klasickou lineární algebrou, což umožňuje například analogické řešení soustav lineárních rovnic a efektivní výpočet vlastního čísla a vlastních vektorů (2), (3) a (4).

2.1 Max-plus model synchronizace pro dvě diametrální linky

K synchronizaci odjezdů spojů linek MHD z přestupního uzlu bude využito soustavy rovnic max-plus algebry, která patří mezi nelineární úlohy.

Vstupními údaji pro uvedenou aplikaci jsou:

- požadavek na přestup v dané relaci,
- provozní parametry a jízdní doby mezi zastávkami na synchronizovaných linkách,
- výchozí zastávky na linkách,
- každé vozidlo je přiděleno lince.

Každý model se skládá ze soustavy rovnic. Pro sestavení rovnic platí určitá pravidla:

- shodné intervaly na linkách,
- nutnost zohlednit alespoň dva předchozí příjezdy,
- zajistit v každé rovnici provázanost s výchozí zastávkou.

Při modelování synchronizace linek znázorněných na obr. č. 1 jsou použity následující proměnné a parametry.

Parametry:

Z - množina zastávek,

n - počet relací,

a_i - výchozí zastávka v i-té relaci,

b_i - cílová zastávka v i-té relaci,

(a_i, b_i) - i-tá relace,

t_i - jízdní doba v i-té relaci,

R - množina relací, $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)\}$,

l_q - interval na q-té lince.

o_q - oběžná doba na lince q.

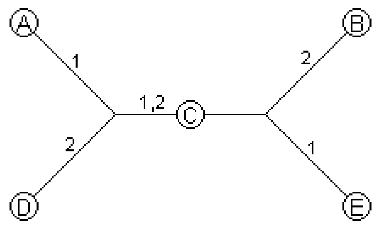
n_q - počet vozidel na lince q.

Proměnné:

$x_i(k)$ - k-tý synchronizovaný odjezd v i-té relaci,

λ - délka maximálního průměrného cyklu mezi odjezdy z jedné resp. více zastávek.

Při modelování synchronizace diametrálních linek 1 a 2 znázorněných na obr. č. 1 jsou použity výše uvedené proměnné a parametry. V daném případě množina zastávek $Z = \{A, B, C, D, E\}$ obsahuje konečné zastávky A, B, D, E a přestupní zastávku C.



Zdroj: Autor

Obr. 1 - Schéma dvou diametrálních linek

Problematickou je otázka stanovení počátečních odjezdů. Při modelování synchronizace linek MHD byla ke stanovení počátečních odjezdů využita hodnota vlastního vektoru λ matice A zjištěná vztahem (1).

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \tag{1}$$

Ke stanovení následných odjezdů byl využit vztah (2).

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \tag{2}$$

Systém rovnic zajišťující přestup mezi linkami 1 a 2 na zastávce C pro jedno vozidlo

$$x_{A,C}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes l_1) \oplus (x_{C,A}(k) \otimes t_{C,A}) \tag{3}$$

$$x_{C,A}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,E} \otimes t_{E,C}) \oplus (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \oplus (x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \tag{4}$$

$$x_{B,C}(k+1) = (x_{C,B}(k) \otimes t_{C,B}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,B}) \tag{5}$$

$$x_{C,B}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \oplus (x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \tag{6}$$

$$x_{D,C}(k+1) = (x_{D,C}(k) \otimes l_2) \oplus (x_{C,D}(k) \otimes t_{C,D}) \tag{7}$$

$$x_{C,D}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}) \oplus (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,B} \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{E,C}(k) \otimes t_{E,C}) \tag{8}$$

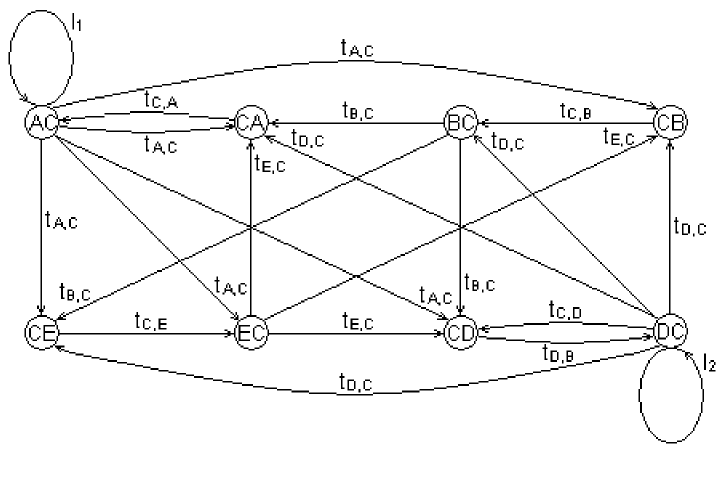
$$x_{E,C}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,E}) \oplus (x_{C,E}(k) \otimes t_{C,E}) \tag{9}$$

$$x_{C,E}(k+1) = (x_{A,C}(k) \otimes t_{A,C}) \oplus (x_{B,C}(k) \otimes t_{B,C}) \oplus (x_{D,C}(k) \otimes t_{D,C}) \tag{10}$$

Tak lze odvodit matici systému A (11) pro model synchronizace diametrálních linek pro jedno vozidlo, podle kterého byl vytvořen komunikační graf (obr. 2).

$$A = \begin{array}{c} \\ (A,C) \\ (C,A) \\ (B,C) \\ (C,B) \\ (D,C) \\ (C,D) \\ (E,C) \\ (C,E) \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} (A,C) & (C,A) & (B,C) & (C,B) & (D,C) & (C,D) & (E,C) & (C,E) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} l_1 & t_{C,A} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & t_{D,C} & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{C,B} & t_{D,B} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & l_2 & t_{C,D} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{E,C} & \varepsilon \\ t_{A,E} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_{C,E} \\ t_{A,C} & \varepsilon & t_{B,C} & \varepsilon & t_{D,C} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array} \tag{11}$$

Na obr. 2 je znázorněn komunikační graf, ze kterého je zřejmé, že mezi každou dvojicí různých vrcholů existuje orientovaná cesta a jedná se tedy silně souvislý graf. Pak je matice systému regulární a platí, že vlastní hodnota matice je určena jednoznačně.



Zdroj: Autor

Obr. 2 - Komunikační graf pro model diametrálních linek při obsluze jedním vozidlem

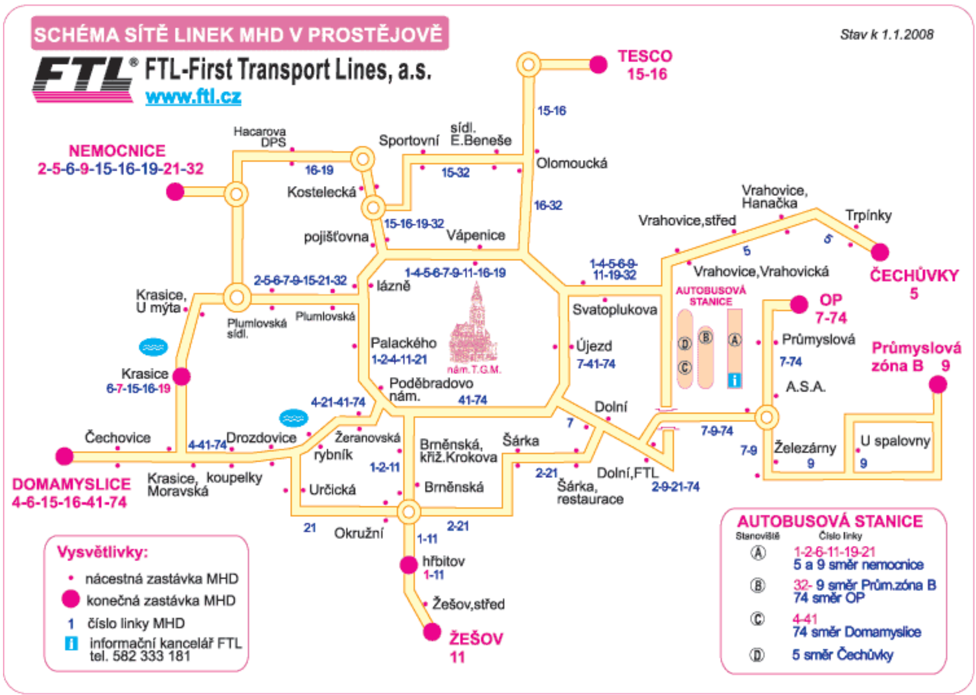
3. SYNCHRONIZACE VYBRANÝCH LINEK V PODMÍNKÁCH MHD PROSTĚJOV

V další části bude pozornost věnována charakteristice MHD Prostějov, návrhu racionalizace a modelování jízdních řádů v dopravní síti MHD Prostějov, resp. stanovení časů odjezdů spojů synchronizovaných linek při redukci počtu linek.

3.1 Definování problému, charakteristika MHD Prostějov

Současný stav MHD v Prostějově je charakteristický dvěma základními nedostatky. Prvním zásadním nedostatkem je nepřiměřeně velký počet linek na větší okresní město, což přispívá k nepřehlednosti, zejména pro cestujícího, který MHD v Prostějově nevyužívá pravidelně. Druhým zásadním nedostatkem jsou nepravidelné intervaly mezi spoji jednotlivých linek, které zhoršují orientaci cestujících o odjezdech (příjezdech) spojů.

Městskou hromadnou dopravu ve městě Prostějov zajišťuje dopravce FTL - First Transport Lines a.s. Území města je obsluhováno prostřednictvím 15 linek a jedné linky komerční, na které neplatí tarif MHD. Schéma sítě linek MHD Prostějov je znázorněno na obr. 3.



Zdroj: FTL

Obr. 3 - Schéma sítě linek MHD v Prostějově

Ze schématu uvedeném na obr. č. 3 je patrné, že systém tras linek MHD je radiálně - okružní. Vnitřní okruh je situován ve vnější hranici historického jádra města, radiálně z něj vycházejí další trasy.

Většina linek začíná, končí nebo projíždí autobusovou stanicí kromě linek 7, 15, 16. V jejím bezprostředním okolí se nachází železniční stanice Prostějov hlavní nádraží, čímž je zajištěna poměrně časově nenáročná možnost přestupu cestujících mezi městskou hromadnou, autobusovou a železniční dopravou na jednom místě. Z hlediska počtu vypravených spojů je nejvíce spojů na linkách č. 2, 4, 5.

3.2 Návrh racionalizace MHD Prostějov

V rámci diplomové práce (5) byla provedena racionalizace MHD Prostějov. K rozhodnutí, které linky vybrat tak, aby byla pokryta poptávka cestujících a určit jaký počet autobusů je třeba přiradit linkám, byla využita metoda PRIVOL. Výsledek minimalizace počtu vozidel bez nutnosti respektovat současný stav činí 15 autobusů obsluhujících 10 linek v období ranní špičky a potvrzuje potřebu eliminace počtu linek a vozidel formulovanou ve studii (6).

Navrhované řešení představuje efektivní využití autobusů. Snížení počtu linek přispívá ke zpřehlednění sítě MHD Prostějov a eliminaci souběhů linek. Model respektuje významné přepravní proudy, takže nejvíce vytížené linky zůstaly zachovány. Počet vozidel na nejvytíženějších linkách byl navýšen, na méně vytížených linkách je přiřazeno jedno vozidlo a intervaly odpovídají intenzitám přepravního proudu. U všech linek dochází ke změnám v JŘ, intervaly mezi spoji budou dány dobou oběhu a počtem přidělených autobusů na jednotlivých linkách. Zavedení intervalové dopravy znamená snadnější zapamatování časů odjezdů spojů jednotlivých linek pro cestující veřejnost a vytváří lepší podmínky pro koordinaci spojů jednotlivých linek.

Realizací navržených změn budou cestující nuceni více přestupovat, ve všech případech však půjde pouze o 1 přestup. V takovém případě bude nutné zabývat se časovou koordinací spojů na jednotlivých linkách na vytipovaných zastávkách.

Pro obyvatele Krasic, severní části města a části průmyslové zóny představuje předkládané řešení zhoršení dostupnosti autobusové stanice a železniční stanice Prostějov hlavní nádraží v podobě absence přímého spojení. V některých relacích budou cestující nuceni více přestupovat, ve všech případech však půjde pouze o 1 přestup. V současné době je největší přestup realizován obousměrně mezi MHD, PAD a železniční dopravou a nejméně přestupů je realizováno v relaci mezi spoji MHD. Realizací navržených změn však vznikne vyšší potřeba přestupovat. V takovém případě bude nutné zabývat se časovou koordinací spojů na jednotlivých linkách na vytipovaných zastávkách

4. EXPERIMENTY NA REÁLNÝCH DATECH

V další části příspěvku bude pozornost věnována synchronizaci linek zajišťujících alternativní spojení za zrušené linky č. 32 a 74. Vzhledem k tomu, že se jedná o méně vytížené linky je v experimentech uvažován případ, kdy je každé lince přiřazeno jedno vozidlo, což odpovídá současnému stavu resp. intervalu na těchto linkách.

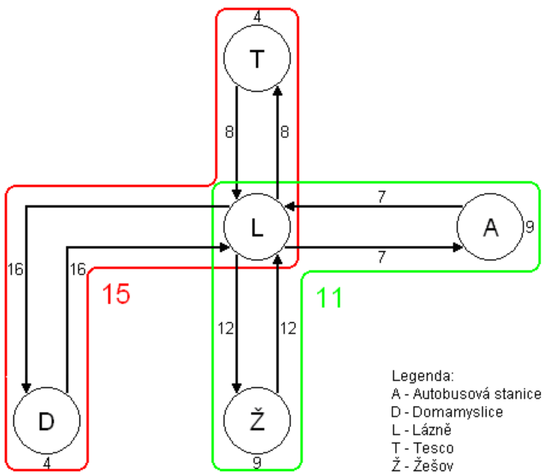
V předloženém příspěvku jsou řešeny 2 experimenty ve kterých se vychází z max-plus modelu synchronizace linek:

- experiment č. 1 – zajištění přestupu mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně
- experiment č. 2 – zajištění přestupu mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice.

V obou experimentech byly počítány čtyři varianty. Tyto varianty se liší kombinací výchozích zastávek na linkách ke kterým je vztažen pohyb vozidla. Vzhledem k obdobnému výpočtu jednotlivých variant a rozsahu příspěvku je pro každý experiment uveden výpočet pouze pro variantu č. 1 a v závěrečném srovnání výsledků jsou uvedeny výsledky všech variant.

4.1 Experiment č. 1

V experimentu č. 1 se jedná o zajištění přestupu mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně (Obr. 4) nahrazující přímé spojení v relaci aut. st. – sídl. E. Beneše, TESCO původně obsluhované linkou 32. Přestup je zajištěn systémem rovnic max-plus algebry, který zohledňuje příjezdy vozidel MHD ze sousední a výchozí zastávky. V daném případě množina zastávek $Z = \{A, D, L, T, Z\}$ obsahuje konečné zastávky A, D, T, Z a přestupní zastávku L.



Zdroj: Autor

Obr. 4 - Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 11 a 15

Dalšími potřebnými vstupními údaji v případě experimentu č. 1 jsou:

- provozní parametry linek 11 a 15 (viz tab. 1),
- jízdní doby mezi zastávkami na linkách 11 a 15 (viz tab. 2),
- požadavek na přestup na zastávce Lázně v relaci autobusová stanice - TESCO,
- požadavek na přestup na zastávce Lázně v relaci TESCO - autobusová stanice,
- každá linka je obsluhována jedním vozidlem.

Tab. 1 - Provozní parametry linek 11 a 15

Linka	Doba spoje [min]	Doba zdržení na konečné [min]	Doba linky [min]	Oběžná doba [min]	Linkový interval [min]
11	19	9	28	56	56
15	24	4	28	56	56

Zdroj: Autor

Tab. 2 - Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 11 a 15

Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]	Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]
A,L	7	T,L	8
L,A	7	L,T	8
D,L	16	Z,L	12
L,D	16	L,Z	12

Zdroj: Autor

Při sestavě rovnic je třeba zvolit na každé z linek výchozí zastávku, ke které bude vztažen pohyb vozidla. V experimentu bude uveden výpočet pro první variantu kombinace výchozích zastávek a provedeno srovnání jednotlivých variant.

Varianta č. 1

- výchozí zastávkou na lince 11 je zastávka autobusová stanice,
- výchozí zastávkou na lince 15 je zastávka Domamyslice,

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 11 a 15 na zastávce Lázně, byla sestavena matice A.

$$A = \begin{array}{c} \\ A,L \\ L,A \\ D,L \\ L,D \\ T,L \\ L,T \\ Z,L \\ L,Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A,L & L,A & D,L & L,D & T,L & L,T & Z,L & L,Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 56 & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 56 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array} \qquad (12)$$

Následně bylo pro sestavenou matici A (12) zjišťováno vlastní číslo a vlastní vektor. Vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek, které se po určité době opakují. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení odjezdů ze zastávek, po kterých nastane období, které se opakuje.

Vypočet hodnot vlastního čísla a vlastního vektoru

Hodnota vlastního čísla a vlastního vektoru byla stanovena v software Scilab prostřednictvím příkazu *[l, v, d] = maxplusmaxalgol (A)*, přičemž jednotlivé prvky uvedeného příkazu mají následující význam:

l - vlastní číslo matice *A*,

v - vlastní vektor matice *A*,

d - přirozené číslo, které představuje délku kritického cyklu matice *A*.

Nyní budou uvedeny příkazy, kterými byly v software Scilab vypočteny hodnoty vlastního čísla a vlastního vektoru.

-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)

v = 56. 40. 56. 36. 28. 16. 28. 7.

l = 56.

Vypočet následných odjezdů

Časy následných odjezdů ze zastávek MHD v časovém úseku, který odpovídá hodnotě vlastního čísla, byly stanoveny v software Scilab prostřednictvím příkazu *[X] = maxplussys (A,x0,p)*, přičemž jednotlivé prvky uvedeného příkazu mají následující význam:

A - matice *A,*

x0 - počátení vektor,

p - vlastní číslo.

Nyní budou uvedeny příkazy, kterými byly v software Scilab definovány následné odjezdy.

-->x0=[56;40;56;36;28;16;28;7];

-->p=56;

-->[X]=maxplussys(A,x0,p)

Srovnání výsledků

Tab. 3 - Srovnání výsledků jednotlivých variant

Relace	Doba přestupu [min]			
	Varianta 1	Varianta 2	Varianta 3	Varianta 4
aut. st. – Lázně – Tesco	9	37	37	9
Tesco – Lázně – aut. st.	4	32	32	4

Nejvýhodnější doby přestupu byly získány u variant č. 1 a 4. Tato skutečnost je dána shodným směrem příjezdu z výchozí do přestupní zastávky na obou synchronizovaných linkách. Doba přestupu je v daném případě doba mezi příjezdem prvního spoje a odjezdem navazujícího spoje.

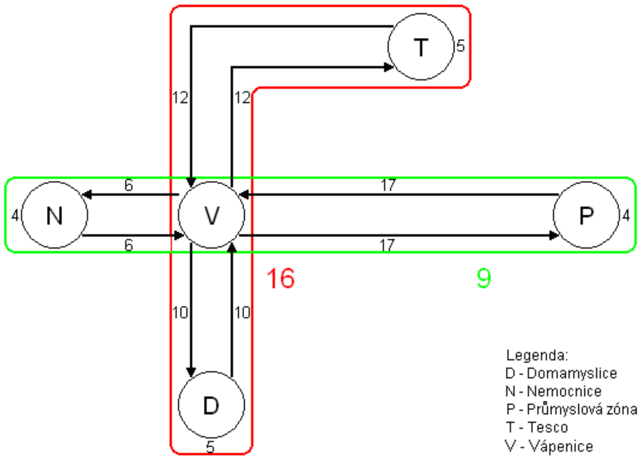
Tab. 4 - Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru aut.st. - TESCO

<table>
<tr><th colspan="4">aut. st. – Lázně – Tesco</th></tr>
<tr><th>Relace</th><th>Příjezd</th><th>Relace</th><th>Odjezd</th></tr>
<tr><td rowspan="6">aut. st. - Lázně</td><td>5:26</td><td rowspan="6">Lázně - TESCO</td><td>5:35</td></tr>
<tr><td>6:22</td><td>6:31</td></tr>
<tr><td>7:18</td><td>7:27</td></tr>
<tr><td>8:14</td><td>8:23</td></tr>
<tr><td>9:10</td><td>9:19</td></tr>
<tr><td>10:05</td><td>10:14</td></tr>
</table>

Zdroj: Autor

4.2 Experiment č. 2

V tomto experimentu se jedná o zajištění přestupu mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice (Obr. č. 5) nahrazující přímé spojení v relaci Domamyslice – OP původně obsluhované linkou 74. Přestup je zajištěn systémem rovnic max-plus algebry, který zohledňuje příjezdy vozidel MHD ze sousední a výchozí zastávky. V daném případě množina zastávek $Z = \{D, N, P, T, V\}$ obsahuje konečné zastávky D, N, P, T a přestupní zastávku V.



Zdroj: Autor

Obr. 5 - Fragment dopravní sítě MHD Prostějov obsahující linky 9 a 16

Dalšími potřebnými vstupními údaji v případě experimentu č. 2 jsou:

- provozní parametry linek 9 a 16 (viz tab. 5),
- jízdní doby mezi zastávkami na linkách 9 a 16 (viz tab. 6),
- požadavek na přestup na zastávce Vápenice v relaci Domamyslice – Prům. zóna,
- požadavek na přestup na zastávce Vápenice v relaci Prům. zóna – Domamyslice,
- každá linka je obsluhována jedním vozidlem.

Tab. 5 - Provozní parametry linek 9 a 16

Linka	Doba spoje [min]	Doba zdržení na konečné [min]	Doba linky [min]	Oběžná doba [min]	Linkový interval [min]
9	23	4	27	54	54
16	22	5	27	54	54

Zdroj: Autor

Tab. 6 - Jízdní doby mezi zastávkami na linkách 9 a 16

Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]	Úsek mezi i-tou a j-tou zastávkou	Jízdní doba mezi i-tou a j-tou zastávkou [min]
D,V	10	P,V	17
V,D	10	V,P	17
N,V	6	T,V	12
V,N	6	V,T	12

Zdroj: Autor

Při sestavě rovnic je třeba zvolit na každé z linek výchozí zastávku, ke které bude vztažen pohyb vozidla. V experimentu bude uveden výpočet pro první variantu kombinace výchozích zastávek a provedeno srovnání jednotlivých variant.

Varianta č. 1

- výchozí zastávkou na lince 9 je zastávka nemocnice,
- výchozí zastávkou na lince 16 je zastávka Domamyslice,

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic max-plus algebry, které zajišťují přestup mezi linkami 9 a 16 na zastávce Vápenice, byla sestavena matice *A*.

$$A = \begin{array}{c} \\ D,V \\ V,D \\ N,V \\ V,N \\ P,V \\ V,P \\ T,V \\ V,T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} D,V & V,D & N,V & V,N & P,V & V,P & T,V & V,T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 54 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & \varepsilon & 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 54 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon & 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon & 21 & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array} \qquad (13)$$

Následně bylo pro sestavenou matici *A* (13) zjišťováno vlastní číslo a vlastní vektor. Vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek, které se po určité době opakují. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení odjezdů ze zastávek, po kterých nastane období, které se opakuje.

Vypočet hodnot vlastního čísla a vlastního vektoru

Podobně jako u experimentu č. 1 jsou vypočteny hodnoty vlastního čísla a vlastního vektoru.

```
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
v = 54. 39. 54. 44. 27. 10. 27. 10.
l = 54.
```

Vypočet následných odjezdů

Podobně jako u experimentu č. 1 jsou uvedeny příkazy, kterými byly v software Scilab definovány následné odjezdy.

```
-->x0=[54;39;54;44;27;10;27;10];
-->p=54;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

Srovnání výsledků

Tab. 7 - Srovnání výsledků jednotlivých variant

Relace	Doba přestupu [min]			
	Varianta 1	Varianta 2	Varianta 3	Varianta 4
Domamyslice – Vápenice – Prům. zóna	5	20	20	5
Prům. zóna – Vápenice – Domamyslice	4	12	12	4

Zdroj: Autor

Podobně jako v experimentu 1 byly nejvýhodnější doby přestupu získány u variant č. 1 a 4. Tato skutečnost je opět dána shodným směrem příjezdu z výchozí do přestupní zastávky na obou synchronizovaných linkách. Doba přestupu je v daném případě doba mezi příjezdem prvního spoje a odjezdem navazujícího spoje.

Tab. 8 - Příklad jízdního řádu pro variantu 1 ve směru Domamyslice – Prům. zóna

Domamyslice – Vápenice – Prům. zóna			
Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
Domam. - Vápenice	5:10	Vápenice-Prům. zóna	5:15
	6:04		6:09
	6:58		7:03
	7:52		7:57
	8:46		8:51
	9:40		9:45
	10:34		10:39

Zdroj: Autor

ZÁVĚR

V příspěvku byl prezentován max-plus model pro synchronizaci diametrálních linek. Uvedený přístup je možné využít také pro synchronizaci okružních linek a komplexnější synchronizaci více linek. Reálné experimenty byly provedeny při redukci linek v MHD Prostějov. V žádné relaci, ve které bylo zrušeno přímé spojení nedošlo k omezení přepravní příležitosti. Ve všech případech odpovídá interval na navazujících linkách intervalu na zrušených linkách zajišťujících v současnosti přímé spojení. Výsledky těchto experimentů jsou povzbudivé a odpovídají charakteru synchronizovaných linek. Provedené experimenty prokázaly využitelnost tohoto přístupu.

Článek byl zpracován s podporou grantu Fakulty strojní VŠBTU Ostrava č. SP2011/129 Výzkum v oblasti modelování pro podporu řízení dopravy ve městech.

POUŽITÁ LITERATURA

(1) ČERNÝ, J., KLUVÁNEK, P. *Základy matematickej teórie dopravy*. Bratislava: VEDA, 1991. 279 s. ISBN 80-224-0099-8.

(2) BURKARD R. E., BUTKOVIČ P. *Max algebra and the linear assignment problem*. 2003.

(3) ANDERSEN, M. H. *Max-plus algebra: properties and applications. 2002.*

(4) BACELLI F., COHEN G., OLSDER G. J., QUADRAT J. P. *Synchronization and Linearity*. 2001.

(5) TUREK, R. *Matematické modelování vybraných problémů MHD Prostějov*. Diplomová práce. Ostrava. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2009.

(6) *Studie městské hromadné dopravy města Prostějova včetně komplexní dopravní obslužnosti průmyslové zóny*. UDIMO spol s.r.o., 2007.

(7) *Scilab. Dostupné z* <http://www.scilab.org>