Ročník 3., Číslo 5., 2008

KAPACITNE OMEZENÁ LOKAČNÍ ÚLOHA V PODMÍNKÁCH NEISTOTY

THE CAPACITATED FACILITY LOCATION PROBLEM FOR A VAGUE CONSTRAINTS

Lýdia Gábrišová[1]

Anotace: *Úloha optimálne umiestniť strediská obsluhy s obmedzenou obslužnou schopnosťou tak, aby zabezpečovali požiadavky všetkých zákazníkov pri minimálnych relevantných nákladoch je kapacitne obmedzená umiestňovacia úloha. Vzhľadom na dlhodobý charakter navrhovaného obslužného systému, limitujúce kapacity stredísk, ktoré predstavujú ich obslužnú schopnosť za určité vopred dané odbobie, niesú deterministicky dané. Využitím fuzzy logiky ich možno aproximovať fuzzy množinou a popísať funkciou príslušnosti neznámej hodnoty do tejto množiny. Potom treba stanoviť neznáme reálne objemy kapacít stredísk tak, aby navrhnutý systém dosiahol čo najvyššiu mieru splnenia kapacitných podmienok s čo najnižšími finančnými nákladmi.*

Klíčová slova: neistá, vágna informácia, fuzzy množina, funkcioa príslušnosti neznámej hodnoty do fuzzy množiny

Summary: *The main objective of the thesis is to devise and implement the algorithmic solution of the problem of optimal location of set of facilities so that all customer's demands will be satisfied and the relevant costs are minimal. This optimization task can be modelled by capacitated facility location problem, which is the special class of integer linear programming problems. When a distribution system is to be designed, limits on terminal capability often must be taken into account. In capacitated location problems, the capacity of a facility as an upper limit of its ability to satisfy a given volume of demands cannot be precisely determined in most of practical applications. This circumstance evokes an idea to employ fuzzy approach for handling of the capacities and to utilize the fuzzy description in capacity constraint relaxation.*

Keywords: capacitated location problem, facility, demands of customers, fuzzy approach

1. ÚVOD

Nech I je konečná množina možných umiestnení obslužných stredísk navrhovaného systému, potom pre každé $i \in I$ zavedieme bivalentné premenné $y_i \in \{0,1\}$ modelujúce rozhodnutie o tom, či v mieste i bude alebo nebude umiestnené stredisko. Nech J je konečná množina zákazníkov, potom zavedieme bivalentné premenné $z_{ij} \in \{0,1\}$ vyjadrujúce, či zákazník $j \in J$ bude alebo nebude obslúžený zo strediska v mieste i.

[1] Mgr. Lýdia Gábrišová, PhD., Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: +421-41-513 4061, e-mail: Lydia.Gabrisova@fri.uniza.sk

Úloha, z danej množiny I vybrať strediská s určitou obslužnou schopnosťou za vopred stanovené obdobie dané objemom kapacít a_i, ktoré majú zabezpečiť požiadavky priradených zákazníkov množiny J pri minimalizácii celkových relevantných nákladov je kapacitne obmedzená umiestňovacia úloha s matematickým modelom:

$$\textit{Mimimalizovať} \quad \sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} z_{ij} \tag{1}$$

$$\textit{za podmienok} \quad \sum_{i\in I} z_{ij} = 1 \qquad \textit{pre } j\in J \tag{2}$$

$$z_{ij} \le y_i \qquad \textit{pre } i\in I, j\in J \tag{3}$$

$$\sum_{j\in J} b_j z_{ij} \le a_i \qquad \textit{pre } i\in I \tag{4}$$

$$y_i, z_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \textit{pre } i\in I, j\in J \tag{5}$$

Hodnota účelovej funkcie predstavuje súčet fixných nákladov na vybudovanie strediska v mieste i, označené f_i a prevádzkových nákladov na zabezpečenie požiadaviek zákazníka j o objeme b_j za uvažované obdobie prostredníctvom umiestného strediska i, označené c_{ij}. Podmienky (2) zabezpečujú, aby každý zákazník bol obslúžený práve jedným strediskom a zároveň zákazník môže byť priradený len k umiestnenému stredisku, splnenie podmienok (3).

Keďže danú umiestňovaciu úlohu viem riešiť pre deterministicky dané vstupné hodnoty [1], [2], ukážem postup, ako je možné vysporiadať sa aj s neistými podmienkami.

2. FUZZY PRÍSTUP PRE NEISTÉ VSTUPNÉ HODNOTY

Informácia o obslužnej schopnosti stredísk za určité obdobie je v čase návrhu systému neznáma hodnota a má v reálnych podmienkach kolísavý charakter. Budem ju aproximovať fuzzy množinou, ktorá určuje funkciu príslušnosti do akej miery môže byť reálna hodnota z tejto množiny tou neistou hodnotou [5], [7].

Predpokladám, že dokážem stanoviť približne reálnu obslužnú schopnosť stredísk za určité obdobie ako objem kapacít $\boldsymbol{a}$. Potom objemu kapacít menších alebo rovných $\boldsymbol{a}$ priradím hladinu dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok $h = 1$. Ďalej predpokladám, že poznám približne vektor $\boldsymbol{p}$ ako prírastok vektora $\boldsymbol{a}$ taký, že obslužná schopnosť zákazníkov daná kapacitou $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}$ je už nad rámec možností daných stredísk. Potom objemu kapacít väčšiemu alebo rovnému $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}$ priradím hladinu dôveryhodnosti $h = 0$.

Hodnoty vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}$ budú známe crisp hodnoty. Použijem ich pre opis fuzzy množiny, ktorou budem aproximovať neistú hodnotu kapacít $\underline{\boldsymbol{a}}$.

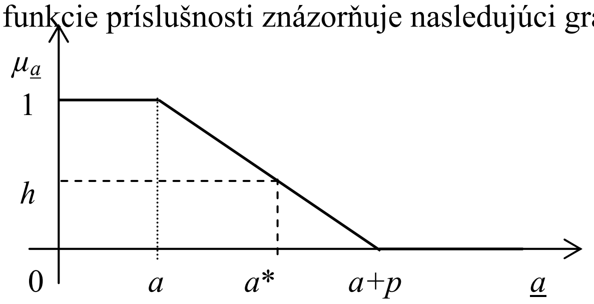
Hodnotu funkcie príslušnosti argumentu $\boldsymbol{a}^*$ s označením $\mu_{\underline{a}}(\boldsymbol{a}^*)$ môžem definovať, keď za jej argument zvolím jedno číslo, napríklad maximálnu hodnotu zo všetkých zložiek vektora $\boldsymbol{a}^*$ s označením a^*. Potom hodnota funkcie príslušnosti a^* k intervalu $(a, a+p)$ s maximálnymi zložkami príslušných vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}$ bude predstavovať hladinu dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok najzaťaženejšieho strediska a nadobúda hodnoty z intervalu <0,1> takto:

$$\mu_{\underline{a}}(a^*) = 1 \qquad \text{pre } a^* \le a$$

$$\mu_{\underline{a}}(a^*) = \frac{a+p-a^*}{p} \qquad \text{pre } a^* \in (a, a+p) \qquad (6)$$

$$\mu_{\underline{a}}(a^*) = 0 \qquad \text{pre } a^* \geq a+p$$

Priebeh funkcie príslušnosti znázorňuje nasledujúci graf:



Obr. 1 - Funkcia príslušnosti k fuzzy množine a

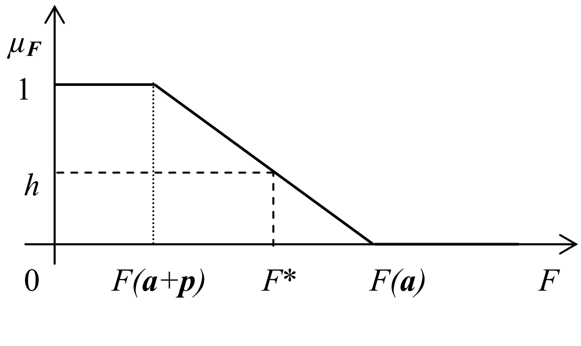
Pri neistých vstupných konštantách navrhovaného systému bude aj hodnota účelovej funkcie neurčitá. Ak budem riešiť úlohu pre približné crisp hodnoty kapacít obslužných stredísk s objemom $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}$, získam dve riešenia $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ a $(\boldsymbol{y}^p, \boldsymbol{z}^p)$. Predstavujú výber stredísk a k nim priradených zákazníkov a hodnotu účelovej funkcie F. V závislosti na zvolených kapacitách označím jej hodnoty $F(\boldsymbol{a})$ a $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})$. Pri vyšších kapacitách stredísk $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}$ dosiahne účelová funkcia nižšiu hodnotu ako pri kapacitách $\boldsymbol{a}$. Tak dostanem interval $(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}), F(\boldsymbol{a}))$ ako fuzzy množinu hodnôt účelových funkcií považovaných za „dosť malé“, ktorý bude aproximovať neznámu hodnotu účelovej funkcie $F(\boldsymbol{a}^*)$ s určitou mierou dôveryhodnosti danou hodnotou funkcie príslušnosti argumentu $F^* = F(\boldsymbol{a}^*)$ s označením $\mu_F(F^*)$ k fuzzy intervalu $(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}), F(\boldsymbol{a}))$. Funkciu definujem nasledovne:

$$\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*) = 1 \qquad \text{pre } F^* \leq F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}),$$

$$\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*) = \frac{F(\boldsymbol{a}) - F^*}{F(\boldsymbol{a}) - F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})} \qquad \text{pre } F^* \in (F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}), F(\boldsymbol{a})) \qquad (7)$$

$$\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*) = 0 \qquad \text{pre } F^* \geq F(\boldsymbol{a}),$$

Priebeh funkcie znázorňuje nasledujúci nasledujúci graf:



Obr. 2 - Funkcia príslušnosti k fuzzy množine F

Mojim cieľom je nájsť taký objem kapacít, aby riešenie úlohy dosiahlo maximálnu hladinu dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok pri zabezpečení minimálnej hodnoty účelovej funkcie. Na nájdenie takej optimálnej hladiny dôveryhodnosti riešenia *H* je možné použiť napríklad iteratívny algoritmus [6]. Ukážem môj postup:

2.1. Heuristická metóda na nájdenie optimálnej hladiny dôveryhodnosti riešenia s využitím miery neprípustnosti jej postupných riešení

Neprípustnosť riešenia je daná nesplnením obmedzujúcich kapacitných podmienok (4), keď súčet požiadaviek priradených zákazníkov k vybratému stredisku je väčší ako jeho kapacita. Mieru neprípustnosti riešenia som počítala ako relatívnu hodnotu podľa vzorca:

$$previs_i = \frac{\sum_{j \in J} b_j z_{ij} - a_i}{a_i} > 0 \qquad \text{pre všetky } i \in I$$

a je daná maximálnym zo všetkých vzniknutých previsov vybratých stredísk, teda najzaťaženejším strediskom. Všetky ostatné vybraté strediská môžu byť už len v menšom previse alebo v previse nebudú.

Popíšem návrh heuristickej metódy na nájdenie optimálnej hladiny dôveryhodnosti výsledného riešenia kapacitne obmedzenej umiestňovacej úlohy *H* s využitím miery neprípustnosti jej postupných riešení v závislosti na zvolenej hladine *h*. Pre každé také riešenie určím prípustnú hladinu dôveryhodnosti riešenia h^* a za prípustnú hodnotu budem považovať všetky $h^*>0$, ktoré budú predstavovať splnenie kapacitných podmienok s čo najvyššiou možnou mierou a dosiahnu pritom „dostatočne malú“ hodnotu účelovej funkcie, teda najnižšie možné finančné náklady navrhnutého obslužného systému.

Budem postupne riešiť úlohu $Min\ \{ F(\mathbf{y},\mathbf{z})$ za podmienok $\mathbf{B}\ \mathbf{z}^T \le \mathbf{a}(h)$, (2), (3), (5) $\}$ pre hodnoty $\mathbf{a}(h) = h.\mathbf{a} + (1-h).(\mathbf{a}+\mathbf{p})$ počítané pre vopred zvolené *h* od 0 po 1 ako $h = h + \Delta h$ s rovnakým prírastkom $\Delta h > 0$. Hodnota $\mathbf{a}(h)$ je objem kapacít stredísk, ktorý prináleží k fuzzy množine $(\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{p})$ s hladinou príslušnosti *h*. Riešením úlohy sú vždy nové hodnoty premenných $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ a hodnota účelovej $F(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{a}(h))$ Použitím vzťahu (7) môžem vypočítať hodnotu funkcie príslušnosti μ_F argumentu $F(\mathbf{a}(h)) = F(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{a}(h))$ k fuzzy množine jej „dosť malých“ hodnôt. a môže byť:

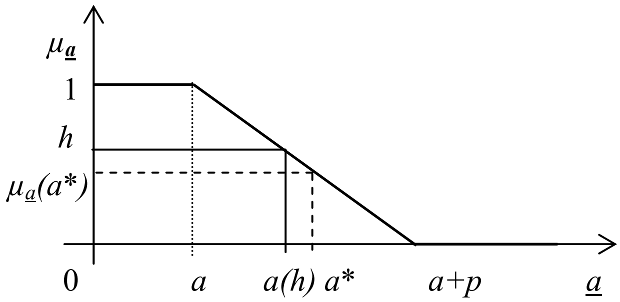
Každé riešenie úlohy pre dané *h* môže byť:

- *prípustné* – hladinou dôveryhodnosti tohto riešenia bude $h^* = min\ \{ h, \mu_F(F(\mathbf{a}(h))) \}$ a za prípustnú hodnotu budem považovať každé $h^* \le \mu_F(F(\mathbf{a}(h)))$,
- *neprípustné* – dané nesplnením kapacitných podmienok. Označím p^* rozdiel celkových požiadaviek zákazníkov priradených k najzaťaženejšiemu stredisku a jeho kapacity. Miera dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok získaného riešenia je podľa (6) daná hodnotou funkcie príslušnosti argumentu $a^* = a(h)+p^*$ k fuzzy množine $(a,a+p)$:

$$\mu_{\underline{a}}(a^*) = \frac{a+p-a^*}{p} \text{ pre } a^* \in (a,a+p) \quad \text{alebo } \mu_{\underline{a}}(a^*) = 0 \text{ pre } a^* \ge a+p,$$

V prípade, že riešenie úlohy prinieslo takú veľkú mieru neprípustnosti, že hodnota kapacít $a(h)+p^*$ presiahne daný fuzzy interval $(a,a+p)$, riešenie nemôže byť akceptované, pretože bolo umiestnené stredisko, ktorého miera dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok je nulová.

Keď $\mu_{\underline{a}}(a^*) > 0$ bude miera dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok získaného neprípustného riešenia nižšia ako h teda ako hladina, s ktorou boli zvolené kapacity $\boldsymbol{a(h)}$. Uvedenú zmenu znázorňuje nasledujúci graf:



Obr. 3: *Funkcia príslušnosti k fuzzy množine* $\underline{a}$.

Celkový objem požiadaviek kladených na najzaťaženejšie stredisko je $a(h)+p^*$ a to kladie otázku: Ako sa zmení návrh obslužného systému pre všetky kapacity stredísk $\boldsymbol{a(h)}$ zvýšené o p^*?

Budem preto riešiť úlohu $Min\ \{\ F(\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\ )$ za podmienok $\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{z}^T \leq \boldsymbol{a}(h)+p^*$,(2), (3), (5) $\}$ pri kapacitách $\boldsymbol{a}(h)+p^*$, ktoré prináležia do fuzzy intervalu $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})$ s hladinou dôveryhodnosti $\mu_{\underline{a}}(a^*)$. Jej riešením sú hodnoty $(\ \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\ )$ a hodnota účelovej funkcie $F(\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{a}(h)+p^*\ )$. Označím ju F^* a bude k fuzzy množine neznámych „dosť malých" hodnôt účelových funkcií prináležať s mierou príslušnosti danou hodnotou funkcie počítanou podľa (7):

$$\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*) = \frac{F(\boldsymbol{a}) - F^*}{F(\boldsymbol{a}) - F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})} \qquad \text{pre } F^* \in (F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}),\ F(\boldsymbol{a})),$$

inak $\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*) = 1$ pre $F^* \leq F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})$ a $\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*) = 0$ pre $F^* \geq F(\boldsymbol{a})$.

Výsledné riešenie úlohy bude spĺňať kapacitné podmienky $\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{z}^T \leq \boldsymbol{a}(h)+p^*$ s nižšou hladinou dôveryhodnosti $h^* \leq \mu_{\underline{a}}(a(h)+p^*)$, pričom rovnosť tu bude splnená v prípade prípustného riešenia úlohy. Hodnotu h^* vypočítam podľa (6) ako hodnotu funkcie $\mu_{\underline{a}}$ argumentu $\boldsymbol{a}(h)+p^*+nové\ p^*$, ktoré prinesie neprípustné riešenie úlohy a za prípustnú hladinu dôveryhodnosti h^* riešenia danej úlohy zoberiem kladné $h^* \leq \mu_{\boldsymbol{F}}(F^*)$.

Optimálnu hladinu spoľahlivosti výsledného riešenia H potom dostanem ako najväčšiu možnú hodnotu z množiny prípustných hodnôt h^*. V prípade rovnakých hodnôt rozhodne vyššia hodnota $\mu_{\boldsymbol{F}}(F^*)$.

2.2. Algoritmus využívajúci mieru neprípustnosti

Pre počítané hodnoty som zvolila označenie v zmysle popísanej heuristiky:

pre výpočet p^* označenie *OW_abs* , pre a^* označenie new_a_i pre $i \in I$, pre výpočet h^* podľa (6) označenie *h_OW* a *mi_F* pre počítané hodnoty funkcie μ_F podľa (7).

Vstupné hodnoty: vstupné konštanty modelu a crisp hodnoty kapacít a_i a $a_i + p_i$ pre $i \in I$
zvolím: $a_{max} = max\ \{a_i,\ i \in I\}$, $p_{max} = max\ \{p_i,\ i \in I\}$, h_{min} ako $\Delta h > 0$

Algoritmus Kap_OW:

1. nastav $h = 0$

2. rieš úlohu (1), (2), (3), (5) za podmienok $\sum_{j \in J} b_j z_{ij} \le a_i$ pre $i \in I$, vypočítaj F_{max} rieš tú istú úlohu za podmienok $\sum_{j \in J} b_j z_{ij} \le a_i + p_i$ pre $i \in I$, vypočítaj F_{min}

3. nastav $h = h + h_{min}$
(test na ukončenie algoritmu) ak $h = 1 + h_{min}$, tak koniec algoritmu, inak
vypočítaj $new\_a_i = h.a_i + (1 - h).(a_i + p_i)$ pre $i \in I$

4. rieš úlohu (1), (2), (3), (5) za podmienok $\sum_{j \in J} b_j z_{ij} \le new\_a_i$ pre $i \in I$,
vypočítaj F_{new} a $mi\_F = (F_{max} - F_{new}) / (F_{max} - F_{min})$

5. vypočítaj $OW\_abs = \sum_{j \in J} b_j z_{ij} - new\_a_i$ pre $i \in I$

6. vypočítaj $new\_a_i = new\_a_i + OW\_abs$ pre $i \in I$
ak $new\_a_i \ge a_{max} + p_{max}$, tak návrat na krok **2**
inak, ak $OW\_abs = 0$, tak $h\_OW = h$
inak $h\_OW = (a_{max} + p_{max} - new\_a_i) / p_{max}$

7. ak $h\_OW \le mi\_F$, tak *h_OW* zaraď do množiny prípustných h^*

8. ak $OW\_abs = 0$, tak návrat na krok **2**, inak návrat na krok **3**.

Výstupné hodnoty: množina prípustných h^*, s ktorých vyberiem optimálne H.

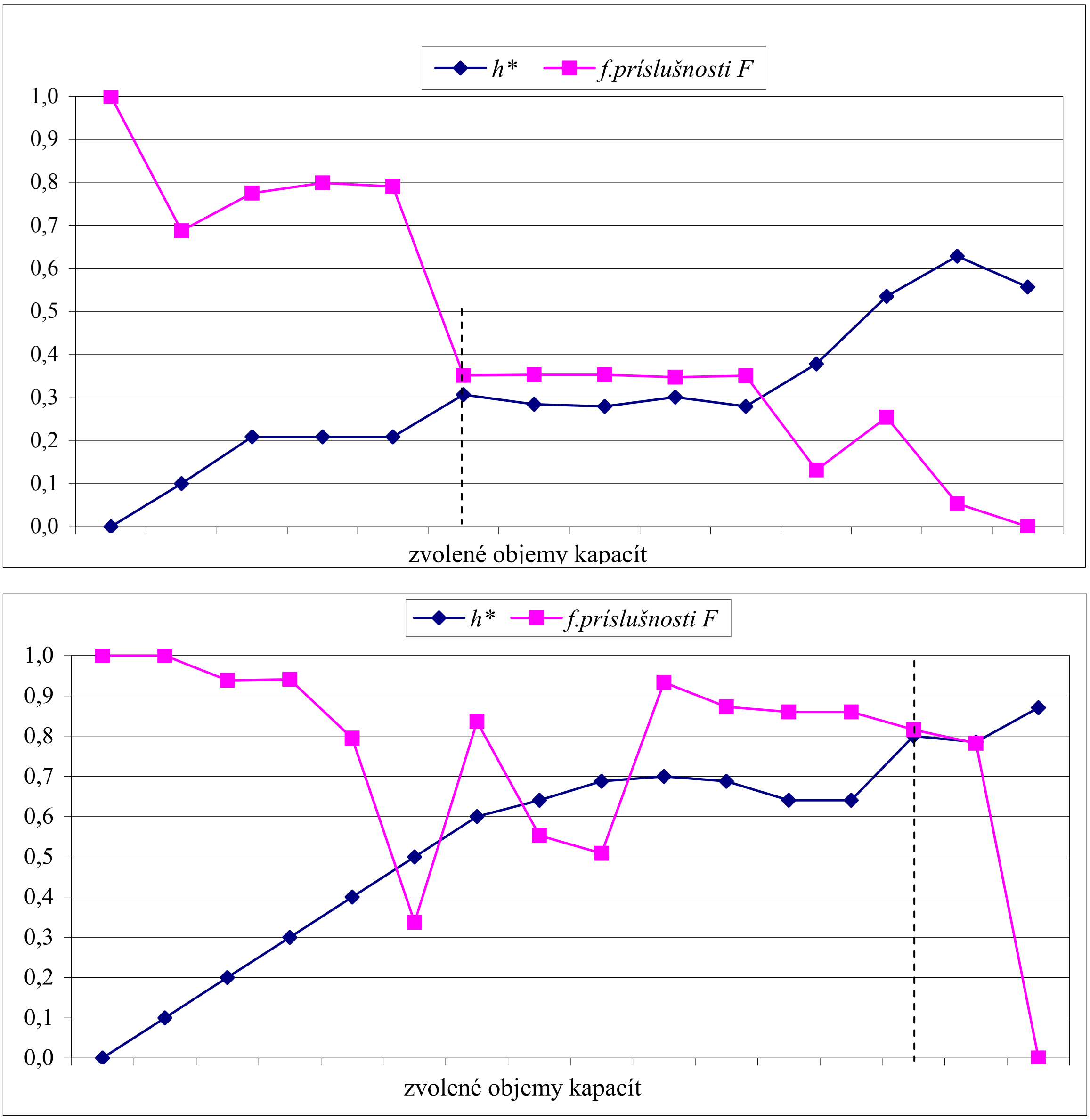
3. VÝPOČTOVÉ EXPERIMENTY

Algoritmus *Kap_OW* som implementovala a testovala na reálnych dátach Cestnej siete SR, kde so 71 možných umiestnení stredísk (okresné mestá SR) treba vybrať také, aby zabezpečili požiadavky 2907 obcí SR. Vstupné konštanty matematického modelu som účelovo generovala. Vzniklo 9 rôznych úloh, v ktorých pre vstupné kapacity stredísk som zvolila rovnaké hodnoty pre všetky strediská a vstupné hodnoty ako $h_{min} = 0.1$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}$.

Na nasledujúcich obrázkoch ukážem riešenie 2 vybratých úloh, kde je znázornené ako sa menia príslušné hodnoty $\mu_F(F^*)$ a h^* reprezentované spojnicovým grafom medzi nadobudnutými diskrétnymi hodnotami. Mieru spoľahlivosti „dosť malej“ hodnoty účelovej funkcie $\mu_F(F^*)$ na hladine $\mu_{\underline{a}}(a^*)$ reprezentuje horná lineárne lomená „klesajúca“ krivka. Spodná „rastúca“ krivka zase reprezentuje mieru spoľahlivosti splnenia kapacitných podmienok. V tejto súvislosti treba brať do úvahy fakt, že pri riešení úloh s reálnymi dátami nebude vždy zaručené, že hodnoty účelových funkcií so zvyšujúcim sa h budú monotónne rásť a zodpovedajúca funkcia príslušnosti hodnôt účelových funkcií k fuzzy množine „dosť malých“ hodnôt bude monotónne klesať. Vzhľadom na vzniknuté neprípustnosti riešení sa mení hladina dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok a jej zmena tiež nebude mať monotónne rastúci charakter [3], [4].

Na 1. grafe je znázornené riešenie úlohy LAS071322921, kde podľa navrhnutej heuristickej metódy bude optimálne *H* ležať na čiarkovanej čiare ako $min\{0{,}307,\ 0{,}352\}$.

2. graf znázorňuje riešenie úlohy LAS071762921, kedy môže dôjsť k viacerým zlomom v priebehu kriviek. Výsledné riešenie som zakreslila na čiarkovanej čiare, kde miera dôveryhodnosti splnenia kapacitných podmienok dosiahla $h^* = 0{,}8$ a miera dôveryhodnosti hodnoty účelovej funkcie $\mu_F(F^*) = 0{,}816$. Optimálne $H = 0{,}8$.



Obr. 4 - Priebeh zmien hodnôt μ_F a h* v závislosti na μ_a

4. ZÁVER

Navrhnutý postup riešenia kapacitne obmedzenej umiestňovacej úlohy pri neistých kapacitných obmedzeniach s využitím teórie fuzzy množín priniesol výsledky, ktoré uvádzam v tabuľke 1 pre všetkých 9 vybratých úloh. Kvalitu dosiahnutého riešenia je možné zvýšiť jemnejším delením fuzzy intervalu (***a***,***a***+***p***), to je zvoliť menšie Δh alebo navrhnúť postup tak, aby v prípade neprípustnosti čiastkových riešení úlohy pri zvolených objemoch kapacít bola vzniknutá neprípustnosť odstránená alebo aspoň zlepšená.

Tab. 1 - Výstupné hodnoty riešenia vybratej skupiny úloh

označenie úlohy	algoritmus *Kap_OW*	
	H	*mi_F**
LAS071322921	0,307	0,352
LAS071342921	0,432	0,615
LAS071362921	0,509	0,524
LAS071522921	0,342	0,629
LAS071542921	0,429	0,722
LAS071562921	0,537	0,697
LAS071722921	0,848	1
LAS071742921	0,656	0,997
LAS071762921	0,8	0,816

Dosiahnuté výsledky otvárajú možnosť aplikácie v rôznych oblastiach logistiky a pri rôznych podmienkach neistoty uvažovaných vstupných objektoch.

Tento príspevok vznikol s podporou výskumného projektu VEGA 1/3775/06.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] GÁBRIŠOVÁ L. *Optimalizácia umiestňovania kontrolných a obslužných stredísk v sieti v podmienkach neistoty.* Dizertačná práca, FRI, Žilinská univerzita, Žilina, 92 s, 2008.

[2] JANÁČEK J., BUZNA Ľ. *Facility location in distribution systems.* Žilinská univerzita, Žilina, 142 s, 2006.

[3] JANÁČEK J., GÁBRIŠOVÁ L. *Fuzzy Set Operations for Capacity Constraint Relaxation.* In: Journal of Information, Control and Management Systems, Vol.3, No.2, 81-89 s, 2005.

[4] MRAVÍKOVÁ A. *Riešenie úloh okružných jázd s fuzzy obmedzeniami pomocou algoritmu využívajúceho mieru neprípustnosti.* Diplomová práca, 2005.

[5] RAMÍK J., VLACH M. *Generalized Concavity in Fuzzy Optimization and Decision analysis.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 296 s, 2002.

[6] TANAKA H., ASAI K. *Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers.* Fuzzy Sets and System, 13, 1-10, 1984.

[7] TEODOROVIČ D., VUKADINOVIČ K. *Trafic Control and Transport Planning*: A Fuzzy Set and Neural Networks Approach. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 387 s, 1998.

Recenzent: doc. Ing. Josef Volek, CSc.
Univerzita Pardubice, DFJP, Katedra informatiky v dopravě