

# POUŽITÍ KOMERČNÍHO IP-SOLVERU PRO ŘEŠENÍ UMISŤOVACÍCH ÚLOH

## EXPLOITATION OF COMERCIAL IP-SOLVER FOR LOCATION PROBLEM SOLVING

Jaroslav Janáček<sup>1</sup>

---

*Anotace: V dopravních systémech se setkáváme s úlohou umístování obslužných středisek tak, aby náklady na obsluhu objektů sítě byly co nejmenší. Obecně jsou tyto úlohy modelovány prostředky celočíselného lineárního programování. To obvykle znamená, že exaktní algoritmus pro úlohy praktického rozsahu vyžaduje pro získání optimálního řešení příliš velkou výpočetní dobu. Přesto však existuje třída umístovacích úloh, tzv. pokrývací úlohy, které jsou řešitelné i komerčními softwarovými prostředky v krátké době. V tomto příspěvku ukážeme postup, jak umístovací úlohy převést na úlohy pokrývací. V závěru příspěvku bude publikovaná i krátká výpočetní studie obsahující porovnání výkonnosti komerčního optimalizačního softwaru s exaktní metodou pro daný typ úlohy.*

*Klíčová slova: Obslužný systém, umístovací úloha, pokrývací model, alokační model*

*Summary: The service system design problem with an objective to minimize the cost of customer service can be often met in transportation systems. In general, these problems are modeled by means of integer linear programming. It usually follows that an exact algorithm needs too long computational time to find an optimal solution. In spite of it, there exists a class of location problems, so-called covering problems, which are solvable even by commercial software in a short time. In this contribution, we demonstrate the approach of reformulation the location problem to the covering one. At the end of this contribution, there is published a short numerical study, which contains a efficiency comparison between a commercial software and an exact method for this type of problem.*

*Key words: Service system, location problem, covering model, and allocation model*

### 1. ÚVOD

V rozsáhlých dopravních sítích, jako jsou železniční a podobné sítě, je třeba navrhovat různé obslužné systémy v důsledku změn vnějších podmínek a nebo vzniku nových potřeb. Obsluhované objekty sítě, které budeme ve shodě se zvyklostmi v příslušné oblasti nadále nazývat zákazníky, jsou většinou rozmístěny v uzlech dopravní sítě. Strukturu obsluhovaného systému kromě zmíněných zákazníků, tvoří obslužná střediska o jejichž umístění je třeba rozhodnout. Množina  $I$  možných umístění je obvykle tvořena konečnou množinou uzlů dopravní sítě, které svou infrastrukturou umožňují funkci obslužného střediska. Protože rozpočet na vybudování obslužného systému bývá omezen, je úloha návrhu obslužného

---

<sup>1</sup> prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc., Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra dopravných sietí, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: +421 41 5134204, e-mail: [jaroslav.janacek@fri.uniza.sk](mailto:jaroslav.janacek@fri.uniza.sk)

systemu formulována jako úloha rozmístění nejvýše  $p$  středisek obsluhy v některých uzlech z množiny  $I$  tak, aby kvantifikované kritérium kvality návrhu nabylo co nejlepší hodnoty. Samotné kritérium kvality je často vyjádřeno náklady na obsluhu požadavků zákazníků za jisté období, jindy může být kritériem kvality průměrná doba potřebná pro dosažení zákazníka [2], [4], [7] a [8].

Jak ukážeme později, určení rozhodnutí o optimálním rozmístění obslužných středisek představuje rozsáhlou kombinatorickou úlohu, kde nalezení nejlepšího řešení bez použití metod matematického programování není možné. Navrhovatel obslužného systému obvykle nedisponuje dostatkem času pro to, aby si opatřil odbornou pomoc formou zadání úlohy vědecko-výzkumnému týmu a tak je odkázán na využití existujících komerčně dostupných nástrojů na podporu rozhodování.

Tato cesta k nalezení optimálního řešení má však obvykle různá úskalí. Jedno velice významné ve spojitosti s návrhem rozsáhlých obslužných systémů spočívá v tom, že komerční nástroje pro podporu rozhodování musí být schopné řešit obecné úlohy matematického programování a proto jsou vybaveny algoritmy, které řeší vždy celou třídu úloh, jako jsou úlohy lineárního programování anebo úlohy celočíselného programování. Tato obecnost je však zaplácena tím, že při velkém rozsahu úloh jistého typu tyto úlohy algoritmy selhávají v porovnání se specifickými algoritmy, které však obvykle nebývají součástí komerčních nástrojů pro podporu rozhodování. Úloha návrhu obslužného systému s minimálními náklady závislými na průměrné vzdálenosti zákazníků od obslužných středisek je právě takovou úlohou, kde obecné nástroje pro podporu rozhodování – IP-solvery selhávají. V tomto příspěvku se budeme zabývat způsobem, jak tuto slabinu IP-solverů překonat a umožnit navrhovatelům obslužných systémů získat racionální řešení s použitím běžných komerčně dostupných softwarových nástrojů.

## 2. NÁSTROJE PRO PODPORU ROZHODOVÁNÍ

V obecném slova smyslu nástrojem pro podporu rozhodování může být cokoliv co umožní manažerovi zefektivnit a zracionalizovat rozhodnutí, která musí provést. Nástroj pro podporu rozhodování může mít mnoho podob od aplikovatelné teorie, přes kodifikované postupy až po různé softwarové systémy jako jsou databázové systémy, informační systémy a nebo taková softwarová díla, která na základě zadaných údajů, podmínek a kvantifikovaného kritéria vypočítají optimální řešení.

V tomto příspěvku se budeme věnovat poslednímu z uvedených nástrojů pro podporu rozhodování, který je schopen na základě uvedených vstupů vypočítat optimální hodnoty rozhodnutí řešících zadanou úlohu. Nástroje tohoto typu budeme dělit do dvou tříd, a to na nástroje podporující rozhodování při řešení specifických úloh, jako je úloha okružních jízd a nebo úloha tvorby grafikonu a na nástroje, které slouží pro řešení obecných optimalizačních úloh. Použití nástrojů jedné i druhé třídy má své výhody a nevýhody.

Specializované nástroje pro podporu rozhodování jsou schopny obvykle řešit podstatně větší úlohy daného typu než obecné nástroje. Navíc bývají často vybaveny databázemi obsahujícími popis příslušné dopravní sítě, mívají grafický výstup, který umožňuje uživateli lepší kontrolu vstupních údajů a i lepší orientaci ve výstupech. Často bývá takový nástroj

vybaven i možností interaktivní spolupráce typu člověk-stroj, kdy uživatel po zhodnocení počítačem navrženého řešení upraví vstupní údaje resp. výsledná rozhodnutí a počítač přepočítá důsledky úprav a případně navrhne i lepší řešení respektující úpravy. Takový dialog končí až když uživatel je spokojen s výsledným návrhem. Mezi nevýhody zmíněných nástrojů patří náklady na jejich obstarání a doba potřebná na jejich zhotovení. Protože nástroj bývá zhotovován na zakázku a je „šit na míru“ objednavatele bez možnosti jeho uplatnění u jiných uživatelů, je poměrně nákladný. Navíc doba na jeho zhotovení mnohokrát přesahuje dobu, kterou má uživatel k dispozici pro vypracování vlastního návrhu obslužného systému.

Naopak obecné nástroje pro podporu rozhodování jsou běžně k dispozici na trhu a náklady na jejich obstarání jsou nižší než u speciálních nástrojů. Problémy uživateli ale může způsobit omezení na rozsah úloh které je obecný nástroj schopen řešit a také nutnost vytvořit a zapsat odpovídajícím způsobem model řešené úlohy. Příkladem obecného nástroje je softwarové prostředí Xpress-IVE [9], [10]. Toto prostředí integruje jak solver-řešící algoritmus, tak i modeler-program umožňující zápis modelu v symbolickém tvaru do jednoho nástroje vybaveného navíc i prostředky pro ladění syntaktických chyb v zápisu modelu. Celý nástroj využívá grafické prostředí Xpress-IVE nabízející několik oken, v nichž jsou realizované činnosti jako zápis modelu, vstup a předzpracování vstupních údajů, ladění příslušných zápisů a i úpravy formy a rozsahu výstupů. Pro řešení úloh celočíselného programování využívá Xpress-IVE metodu větví a hranic a pro provedení výše uvedených činností je vybaven jazykem Mosel podobným C-jazyku. V dalších kapitolách ukážeme možnosti použití tohoto nástroje pro návrh rozsáhlého obslužného systému.

### 3. ÚLOHA NÁVRHU OBSLUŽNÉHO SYSTÉMU

Konečná množina obsluhovaných zákazníků bude označena jako  $J$  a množina možných umístění obslužných středisek jako  $I$ . Se zákazníkem  $j$  je spojena velikost jeho požadavku  $b_j$ , která může mít podle potřeby různou interpretaci jako například frekvence jeho požadavků. Dalším údajem, který bude používán je doba  $t_{ij}$ , za kterou je dostupný zákazník  $j \in J$  z možného umístění obslužného střediska  $i \in I$ .

Rozhodnutí o tom, zda v místě  $i \in I$  bude nebo nebude umístěno obslužné středisko, bude modelováno proměnnou  $y_i$  nabývající hodnoty 1 nebo 0, podle toho, zda má nebo nemá být umístěno středisko. Vztah, ke kterému z možných umístění obslužných středisek je daný zákazník  $j$  přiřazen je modelován sadou přiřazovacích proměnných  $z_{ij} \in \{0,1\}$  pro  $i \in I$  a  $j \in J$ , kde proměnná  $z_{ij}$  nabude hodnoty 1, právě když je zákazník  $j$  přiřazen možnému umístění  $i$ . Potom úloha návrhu obslužného systému s minimální průměrnou dobou obsluhy může být formulována modelem (1)-(6):

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} t_{ij} b_j z_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i \in I} z_{ij} = 1 \quad \text{for } j \in J \quad (2)$$

$$z_{ij} \leq y_i \quad \text{for } i \in I, j \in J \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (4)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \text{ for } i \in I. \quad (5)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \text{ for } i \in I, j \in J \quad (6)$$

Zde podmínky (2) zabezpečují, že každý zákazník bude přiřazen právě jednomu možnému umístění obslužného střediska, podmínky (3) zajišťují vazbu mezi přiřazovacími a umístěvacími proměnnými, tj. zabezpečují, aby na místě jemuž je přiřazen nějaký zákazník bylo vybudováno obslužné středisko. Podmínka (4) zajišťuje nepřekročení povoleného počtu obslužných středisek.

Zde je na místě si uvědomit velikost modelu (1)-(6) pro úlohy z praxe, kde počet možných umístění může dosahovat hodnoty 400 až 1000 a počet zákazníků může být roven několika tisícům, což přesáhne možnosti většiny univerzálních komerčních solverů včetně zmíněného softwarového prostředí Xpress-IVE. Přesto je taková úloha exaktně řešitelná, ale jen speciálními algoritmy viz [1], [3] a [6].

#### 4. VYUŽITÍ IP-SOLVERU PRO NÁVRH OBSLUŽNÉHO SYSTÉMU

Náš přístup, který umožní využít softwarového prostředí Xpress-IVE k řešení rozsáhlé úlohy návrhu obslužného systému, spočívá v sestavení modelu pokrývací úlohy, která aproximuje úlohu původně formulovanou jako lokačně-alokační [5]. Pro tento účel rozdělíme interval  $\langle 0, \max\{t_{ij}: i \in I, j \in J\} \rangle$  všech možných časových vzdáleností v úloze na  $r+1$  podintervalů-zón. Zóny jsou oddělené konečnou posloupností rostoucích hodnot  $D_1, D_2, \dots, D_r$ , kde  $D_0=0 < D_1$  a  $D_r < \max\{t_{ij}: i \in I, j \in J\} = D_{r+1}$ . Délky intervalů  $e_k$  pro  $k=0, \dots, r$  budou  $e_0=D_1, e_1=D_2-D_1$  a tak dále až po  $e_r=\max\{t_{ij}: i \in I, j \in J\}-D_r$ .

K umístěvacím 0-1 proměnným  $y_i \in \{0, 1\}$ , zavedeným v předchozí kapitole, zavedeme pomocné 0-1 proměnné  $x_{jk}$  pro každého zákazníka  $j \in J$  a zónu  $k=1, \dots, r$ . Proměnná  $x_{jk}$  nabude hodnoty 1 tehdy, jestliže časová vzdálenost od zákazníka  $j$  k nejbližšímu umístěnému servisnímu středisku je větší než  $D_k$  a jinak nabude hodnoty 0. Potom výraz  $e_0x_{j1}+e_1x_{j2}+e_2x_{j3}+e_3x_{j4}+\dots+e_{r-1}x_{jr}$  je aproximací hodnoty  $t_{ij}$ . Když hodnota  $t_{ij}$  padne do intervalu  $(D_k, D_{k+1})$  je odhadnuta dolní hranicí  $D_k$  s největší možnou chybou  $e_k$ .

Pro sestavení modelu zavedeme pro  $i \in I, j \in J$  a  $k=1, \dots, r$  takovou 0-1 konstantu  $a_{ij}^k$ , která je rovna jedné právě tehdy, je-li časová vzdálenost mezi zákazníkem  $j$  a možným umístěním obslužného střediska  $i$  menší nebo rovna  $D_k$ . Jinak konstanta nabývá nulové hodnoty. Pokrývací model potom formulujeme takto:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^r b_j e_{k-1} x_{jk} \quad (7)$$

$$\text{Subject to} \quad x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij}^k y_i \geq 1 \quad \text{for } j \in J \text{ and } k=1, \dots, r \quad (8)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (9)$$

$$x_{jk} \geq 0 \quad \text{for } j \in J \text{ and } k=1, \dots, r \quad (10)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{for } i \in I \quad (11)$$

Zde účelová funkce (7) odhaduje účelovou funkci (1). Podmínky (8) povolují proměnné  $x_{jk}$  nabýt hodnoty 0, jestliže se alespoň jedno obslužné středisko nachází v časové vzdálenosti  $D_k$  od zákazníka  $j$ . Podmínka (9) dovoluje umístění nejvýše  $p$  obslužných středisek.

## 5. NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Provedli jsme experimenty s cílem demonstrovat jejich časovou náročnost navržené metody. Experimenty s využitím pokrývacího modelu byly provedeny v softwarovém prostředí Xpress-IVE [9], [10] a experimenty s alokačním modelem (1)-(6) byly provedeny s vlastním softwarovým vybavením naprogramovaným v prostředí Delphi, viz [6]. Experimenty byly provedeny na osobním počítači s procesorem Intel Core 2 6700 s následujícími parametry: 2.66 GHz, 3 GB RAM.

Byly řešeny tři rozsáhlé úlohy označené jako case1, case2 a case3, kde ve všech úlohách byla za zákazníka považována každá obec Slovenské republiky (2916 obcí), a množina možných umístění obsahovala pro uvedené případy postupně 449, 961 a 2284 obcí, kde poslední případ zahrnuje všechny obce Slovenské republiky s počtem obyvatel větším než 300. V těchto možných umístěních mělo být vybudováno  $p=223$  středisek. Případ byl řešen pro průměrnou rychlost 60 km/hod a pro skutečné vzdálenosti v silniční síti Slovenské republiky. Maximální časové vzdálenosti  $D^{max}$  v matici  $\{t_{ij}\}$  v jednotlivých úlohách case1, case2 a case3 byly postupně 289, 289 a 432 minut. Úlohy popsané aproximativním pokrývacím modelem (7)-(11), byly řešeny pro počet zón  $r=17$ . Posloupnost  $D_0=0 < D_1 < D_2 < D_3 < \dots < D_r \leq 64$  minut byla určena postupem označeným AB v práci [6]. Protože hodnoty účelové funkce (7) jsou jen dolním odhadem účelové funkce (1) původní úlohy dané modelem (1)-(6), vypočítáváme pro další porovnávání pro každé řešení hodnotu výrazu (1).

V tabulce 1 jsou v řádku „OrigObj“ uvedeny hodnoty účelové funkce (1) získaných řešení. V řádku „Time“ je uvedena výpočetní doba optimalizačního procesu pro daný případ. Výsledky získané použitím softwarového prostředí Xpress-IVE jsou označeny symbolem *Xpress* a výsledky získané vlastním softwarovým vybavením jsou v tabulce označovány názvem hlavní procedury *BBDual*.

Tab. 1 - Hodnoty účelové funkce (1)

		<i>Xpress</i>	<i>BBDual</i>
case1	OrigObj	1.71E+07	1.70E+07
	Time [s]	4	64
case2	OrigObj	1.68E+07	1.67E+07
	Time [s]	9	192
case3	OrigObj	1.67E+07	1.65E+07
	Time [s]	26	1103

## 6. ZÁVĚR

Výše uvedené výsledky ukazují, že použití aproximativních pokrývacích modelů významně posouvá možnosti návrhů obslužných systémů pomocí komerčních IP-solverů. Převedením původní úlohy na úlohu pokrývací je možno dosáhnout nejen řešitelnosti úlohy na dostupném softwarovém prostředku, ale i značné zkrácení doby výpočtu oproti exaktnímu postupu, což umožňuje opakování výpočtu pro různé varianty. Ani přesnost výpočtu není nijak zvlášť znehodnocena. Výsledky získané pomocí aproximace jsou přibližně jen o 1% horší než optimální řešení.

*Tento příspěvek vznikl za podpory výzkumných grantů MVTs ČR/SR/ŽU2/07 Metódy návrhu optimálnej štruktúry verejných obslužných systémov a VEGA 1/3775/06.*

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ERLINKOTTER, D. *A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location*. Operations Research, Vol. 26, No 6, 1978, pp 992-1009.
- [2] JANÁČEK, J.: *Safety on Roads from View of Emergency System Design*. In: Journal of Information, Control and Management Systems, Vol. 4, No 2/1, 2006, pp. 91-101.
- [3] JANÁČEK, J. *Vliv způsobu zónování relevantních vzdáleností na kvalitu aproximativního pokrývacího modelu*. In. Sborník příspěvků „Úlohy diskretní optimalizace v dopravní praxi-Lokace středisek obsluhy s negativními vlivy na okolí“, Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Pardubice 2008, v tisku.
- [4] JANÁČEK, J. *Alokační a pokrývací modely návrhu veřejného obslužného systému*. In. Sborník příspěvků „Úlohy diskretní optimalizace v dopravní praxi-Metody návrhu veřejných obslužných systémů, Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Pardubice 2008, pp 13-25.
- [5] JANÁČEK, J. *Approximate Covering Models of Location Problems*. In: Lecture Notes in Management Science. Proceedings of the 1st International Conference on Applied Operational Research-ICAOR '08, Vol. 1, Sept. 2008, Yerevan, Armenia, pp.53-61, ISSN 2008-0050.
- [6] JANÁČEK J., BUZNA, I. *Facility location in distribution systems*. EDIS Žilina University Publisher, Žilina, 142 p., 2007.
- [7] JÁNOŠÍKOVÁ, L. *Emergency Medical Service Planning*. Communications –Scientific Letters of the University of Žilina, Vol. 9, No 2, 2007, pp 64-68.
- [8] TEICHMAN, D. Příspěvek k problematice evakuace obyvatelstva a možnosti využití matematického modelování při jejím plánování. In: Krízový management, Vol. 7, No 2, 2008.
- [9] XPRESS-MP Manual “Getting Started”. Dash Associates, Blisworth, UK, 2005, p. 105.
- [10] XPRESS-Mosel “User guide”. Dash Associates, Blisworth, 2005, UK, p. 99.

Recenzent: doc. Ing. Josef Volek, CSc.

Univerzita Pardubice, DFJP, Katedra informatiky v dopravě