

# ZAOKRÚHLĽOVANIE POŽIADAVIEK ZÁKAZNÍKOV A JEHO VPLYV NA RIEŠENIE LOKAČNEJ ÚLOHY

## ROUNDING OF CUSTOMER'S DEMANDS AND ITS IMPACT ON SOLUTION OF THE LOCATION PROBLEM

Marta Janáčková<sup>1</sup>, Alžbeta Szendreyová<sup>2</sup>

*Anotácia: Návrh distribučného systému možno formulovať a riešiť pomocou úloh matematického programovania. Základný model kapacitne neobmedzenej umiestňovacej úlohy už vieme riešiť aj pre reálne rozsiahle siete v reálnom čase exaktne. Problém môže nastať, ak ku základnej úlohe pridáme ďalšie podmienky. V niektorých prípadoch je možné zapracovať pridané podmienky do modelu tak, aby po úprave mal formálne tvar základnej lokačnej úlohy. Štruktúra vstupných údajov je ale úpravou obyčajne deformovaná. Upravené úlohy je potom teoreticky možné riešiť spomínanými algoritmi, ale na deformovaných údajoch pracujú menej efektívne. Môžu nastať situácie, že na riešenie rozsiahlych úloh je potrebné neúmerne viac času, alebo môže dôjsť k predčasnemu ukončeniu algoritmu z dôvodu pretečenia pamäte. Na elimináciu takýchto nedostatkov sme skúsili použiť zaokrúhlenie vstupných údajov. V tomto príspevku sa zaoberáme úpravou požiadaviek zákazníkov pri riešení lokačnej úlohy s predpísaným počtom umiestnení stredísk (p-medián) a jej vplyvom na riešenie.*

*Kľúčové slová: lokačná úloha, požiadavky zákazníkov, umiestnenie stredísk*

*Summary: This paper deals with the modifications of customer demands and with their impact of modifications of customer demands on the location of supply centers. The solution of the location problem with exactly  $p$  location is sought. During the computation the penalty constant is used very often. Accumulation of the penalty values in same variable causes the memory overflow. To eliminate this defect, we use the coefficient of the proportionality in some parameters of the location problem. We find how the coefficient of the proportionality influences the accuracy of the final result. The obtained results can help to solve the problem of the distribution systems design.*

*Key words: location problem, customer's demands, location of centers*

### 1. ÚVOD

Pri návrhu lokačných úloh potrebujeme niekedy vyriešiť veľa modifikácií úlohy pre rôzne hodnoty parametrov. Taký prístup vyžaduje veľa času a pamäte. Zaokrúhľovanie hodnôt niektorých parametrov nám pomáha šetriť rozsah pamäte, i keď niekedy na úkor presnosti výsledku.

<sup>1</sup> RNDr. Marta Janáčková, CSc., Žilinská univerzita, Strojnícka fakulta, Katedra aplikovanej matematiky, Hurbanova 25, 01026 Žilina, e-mail: [Marta.Janackova@fstroj.uniza.sk](mailto:Marta.Janackova@fstroj.uniza.sk)

<sup>2</sup> RNDr. Alžbeta Szendreyová, PhD., Žilinská univerzita, Univerzitná 1, Katedra dopravných sietí, 01026 Žilina, e-mail: [Alzbeta.Szendreyova@fri.uniza.sk](mailto:Alzbeta.Szendreyova@fri.uniza.sk)

V tomto príspevku sa zaoberáme úpravou požiadaviek zákazníkov pri riešení lokačnej úlohy s predpísaným počtom umiestnení stredísk ( $p$ -medián) a jej vplyvom na riešenie.

## 2. MODEL ÚLOHY

Nech je daná množina  $J$  zákazníkov a množina  $I$  kandidátov na umiestnenie stredísk. Ďalej je známa matica  $D(i,j)$  najkratších vzdialeností medzi jednotlivými uzlami siete a množina  $B(j)$  požiadaviek zákazníkov. Je daný počet  $p$  požadovaných umiestnení stredísk. Úlohou je vybrať z množiny kandidátov práve  $p$  umiestnení tak, aby z nich boli obslužení všetci zákazníci a to s minimálnymi nákladmi. Predpokladáme, že náklady sú úmerné veľkosti požiadaviek zákazníkov a vzdialenosti zákazníkov od priradeného strediska. Kapacity stredísk nie sú obmedzené a náklady na ich vybudovanie predpokladáme nulové. Každý zákazník má byť obslužený práve jedným strediskom.

Model úlohy bude mať tvar :

$$\text{Min} \quad U = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_j d_{ij} z_{ij} \quad (1)$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{i \in I} z_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (2)$$

$$z_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (4)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (5)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (6)$$

kde  $b_j$  sú požiadavky  $j$ -teho zákazníka,  $z_{ij} = 1$  ak  $j$ -ty zákazník je obslužený  $i$ -tym strediskom, inak  $z_{ij} = 0$ ;  $y_i = 1$  ak v  $i$ -tom kandidátovi je umiestnené stredisko, inak  $y_i = 0$ . Podmienka (2) zabezpečuje, že zákazník  $j$  je priradený práve jednému stredisku  $i$ , podmienka (3) zabezpečuje, že priradenie bude urobené len k umiestneným strediskám a podmienka (4) znamená, že umiestnených bude práve  $p$  stredísk.

Účelová funkcia  $U$  obsahuje požiadavky  $b_j$  a pri rozsiahlej sieti a veľkých požiadavkách sa v nej nasčítajú veľké hodnoty. Aby sme zabránili pretečeniu pamäte, použili sme upravené hodnoty požiadaviek, úmerne menšie oproti pôvodným. Vzhľadom na požiadavky  $b_j$  je účelová funkcia  $U$  lineárna. Preto by sa aj jej hodnota teoreticky mala úmerne zmenšiť. Použitý softvér ale pracuje s celočíselnými premennými. Nestačí preto použiť len koeficient úmernosti  $q$ , ale vytvoríme nové požiadavky  $\underline{b}_j$ . Nove požiadavky sú odhadom hodnoty  $b_j/q$  a definujeme ich nasledovne:

$$\underline{b}_j = [b_j/q] \text{ pre } q \leq b_j$$

$$\text{a } \underline{b}_j = 1 \text{ pre } q > b_j.$$

Pre požiadavky  $\underline{b}_j$  odpovedajúce hodnotám  $q > b_j$  nastane istý kvalitatívny posun oproti ostatným zákazníkom, čo môže zmeniť výber optimálneho riešenia, t.j. iné umiestnenia  $y_i$

a priradenia  $z_{ij}$ . Hodnota  $U$  sa pre nové riešenie od pôvodnej hodnoty líši. Rozsah odchýlky (chyby), ktorej sa dopustíme zaokrúhľovaním požiadaviek  $b_j$  pre  $q > 1$  budeme skúmať experimentom.

Obdobné problémy môžu nastať aj pri lokačnej úlohe s obmedzeným dosahom obsluhy [2], [3].

### 3. VÝSLEDNÉ EXPERIMENTY

Experimenty boli zamerané na zisťovanie vplyvu, ktorý má zaokrúhlenie požiadaviek na hodnoty účelovej funkcie a na čas výpočtu. Všetky úlohy boli riešené na cestnej sieti SR, ktorá obsahuje 2916 obcí. Čas výpočtu bol vo všetkých úlohách meraný v sekundách. Použili sme softvérový prostriedok vytvorený na ŽU, ktorý opakovane riešil umiestňovaciu úlohu pomocou algoritmu *BBdual*. *BBdual* je založený na metóde vetiev a hraníc a veľmi dobre pracuje na reálnych sieťach. Rôznym nastavením vetvenia sa počet umiestnení optimalizoval na požadovanú hodnotu  $p$ . Riešili sme niekoľko skupín úloh. Líšili sa hodnotou  $p$  požadovaného počtu umiestnení a tiež koeficientom  $q$  zaokrúhlenia požiadaviek zákazníkov. Množinu kandidátov na umiestnenie stredísk pre tento experiment tvorili obce s počtom obyvateľov nad 8 000. Množina obsahuje 103 miest. Skúmali sme vplyv deliaceho koeficientu  $q$  na čas výpočtu, na hodnotu účelovej funkcie  $U$  a na množinu umiestnení stredísk.

Požiadavky  $b_j$  boli delené koeficientom  $q$ , ktorý postupne nadobúdal hodnoty 1, 50, 200, 350, ... 1400. Výsledky pre  $q=1$  predstavujú optimálne riešenie úlohy bez zaokrúhlenia požiadaviek. Počet požadovaných umiestnení nadobúdal hodnoty od 10 do 90 s krokom 5. Čas výpočtu so zväčšujúcim sa  $q$  nerástol v žiadnej riešenej úlohe pre danú množinu kandidátov, a vo výsledkoch ho preto neuvádzame. Hodnoty účelových funkcií pre požiadavky upravené koeficientom  $q$  sme porovnávali s hodnotou účelovej funkcie pre pôvodné požiadavky zákazníkov. Vypočítali sme absolútne aj relatívne rozdiely medzi nimi. Rozdiely nadobudli rôzne veľké hodnoty pre jednotlivé hodnoty parametra  $p$ . Parameter  $p$  má totiž vplyv na počet kombinácií možných umiestnení. S rastúcim (klesajúcim) počtom možných kombinácií sa približne menila aj relatívna odchýlka medzi hodnotami účelových funkcií.

P \ U(q)	10		15		20		25		30	
	Hodnota	%	Hodnota	%	Hodnota	%	Hodnota	%	Hodnota	%
U(1)	113 615 831		86 440 048		73 502 023		64 170 287		56 594 911	
U(50)-U(1)	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
U(200)-U(1)	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
U(350)-U(1)	142 662	0,13	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
U(500)-U(1)	142 662	0,13	0	0,00	0	0,00	0	0,00	598 604	1,06
U(650)-U(1)	279 974	0,25	1 485 559	1,72	240 936	0,33	247 868	0,39	598 604	1,06
U(800)-U(1)	279 974	0,25	1 485 559	1,72	749 173	1,02	970 831	1,51	598 604	1,06
U(950)-U(1)	279 974	0,25	1 871 324	2,16	888 726	1,21	970 831	1,51	822 112	1,45
U(1100)-U(1)	279 974	0,25	2 187 025	2,53	888 726	1,21	1 242 164	1,94	822 112	1,45
U(1250)-U(1)	435 088	0,38	2 187 025	2,53	888 726	1,21	1 462 911	2,28	1 486 775	2,63
U(1400)-U(1)	435 088	0,38	2 187 025	2,53	888 726	1,21	1 462 911	2,28	1 486 775	2,63

Tab. 1 - Absolútne a relatívne rozdiely hodnôt účelovej funkcie v závislosti od  $p$  a  $q$  pre 103 kandidátov

V tabuľke 1 uvádzame rozdiely v hodnotách účelových funkcií v závislosti od zaokrúhľovacieho parametra  $q$  a pre  $p$  od 10 do 30. Pre  $p > 40$  sa rozdiely postupne znižovali.

Okrem hodnôt účelovej funkcie sme porovnávali aj riešenia úlohy, t.j. výber umiestnení  $y_i$  a priradení  $z_{ij}$ . V umiestneniach neboli veľké rozdiely. Niektoré obce sa nachádzali vo všetkých riešeniach. Tie boli doplnené rôznymi kombináciami malého počtu ďalších umiestnení. Výber umiestnení pre množinu 103 kandidátov a pre niektoré hodnoty  $q$  uvádzame pre  $p=10$  v tabuľke 2 a pre  $p=15$  v tabuľke 3.

q=1		q=500		q=800		q=1400	
Požiadavky	Názov	Požiadavky	Názov	Požiadavky	Názov	Požiadavky	Názov
37418	Bratislava	37418	Bratislava	37418	Bratislava	21327	<b>Nové Mesto</b>
87285	Nitra	87285	Nitra	87285	Nitra	87285	Nitra
57854	<b>Trenčín</b>	57854	<b>Trenčín</b>	57854	<b>Trenčín</b>	70004	Bratislava
85400	Žilina	85400	Žilina	85400	Žilina	85400	Žilina
43789	Zvolen	43789	Zvolen	43789	Zvolen	43789	Zvolen
56157	Poprad	25088	<b>Rimavská Sobota</b>	25088	<b>Rimavská Sobota</b>	25088	<b>Rimavská Sobota</b>
40870	<b>Košice</b>	56157	Poprad	56157	Poprad	56157	Poprad
92786	Prešov	92786	Prešov	92786	Prešov	92786	Prešov
39948	Michalovce	39948	Michalovce	39948	Michalovce	39948	Michalovce
19948	<b>Dolný Kubín</b>	19948	<b>Dolný Kubín</b>	30417	<b>Ružomberok</b>	30417	<b>Ružomberok</b>

Tab. 2 - Optimálne umiestnenia v závislosti od  $q$  pre  $p=10$  a množinu 103 kandidátov

q=1		q=500		q=800		q=1400	
Požiadavky	Názov	Požiadavky	Názov	Požiadavky	Názov	Požiadavky	Názov
44798	Bratislava-St. M.	44798	Bratislava-St. M.	44798	Bratislava-St. M.	44798	Bratislava-St. M.
70286	Trnava	70286	Trnava	70286	Trnava	70286	Trnava
42262	Nové Zámky	87285	Nitra	87285	<b>Nitra</b>	42262	Nové Zámky
57854	Trenčín	42262	Nové Zámky	42262	Nové Zámky	57854	Trenčín
87285	Nitra	57854	Trenčín	57854	Trenčín	24907	<b>Partizánske</b>
53097	Prievidza	53097	Prievidza	53097	<b>Prievidza</b>	36538	<b>Levice</b>
85400	Žilina	85400	Žilina	85400	Žilina	85400	Žilina
36538	Levice	36538	<b>Levice</b>	43789	<b>Zvolen</b>	43789	Zvolen
83056	Banská Bystrica	83056	<b>Banská Bystrica</b>	25088	<b>Rimavská Sobota</b>	30417	Ružomberok
28332	Lučenec	28332	<b>Lučenec</b>	30417	<b>Ružomberok</b>	56157	Poprad
56157	Poprad	56157	Poprad	56157	Poprad	25088	Rimavská Sobota
92786	Prešov	40870	Košice-Západ	92786	Prešov	92786	Prešov
40870	Košice-Západ	92786	Prešov	40870	Košice-Západ	40870	Košice-Západ
39948	Michalovce	39948	Michalovce	12428	<b>Svidník</b>	12428	Svidník
19948	Dolný Kubín	19948	<b>Dolný Kubín</b>	39948	Michalovce	39948	Michalovce

Tab. 3 - Optimálne umiestnenia v závislosti od  $q$  pre  $p=15$  a množinu 103 kandidátov

Pre  $p=20$  a pre  $p=30$  uvádzame iba početnosť výskytu umiestnení stredísk v jednotlivých kandidátoch na umiestnenie v tabuľkách 4 a 5.

Názov	Početnosť	Názov	Početnosť
Banská Bystrica	11	Prievidza	11
Bratislava-Staré Mesto	11	Senica	11
Dunajská Streda	11	Trenčín	11
Humenné	11	Trnava	11
Košice-Západ	11	Žilina	11
Levice	11	Dolný Kubín	7
Lučenec	11	Bardejov	6
Michalovce	11	Tornaľa	6
Nitra	11	Rožňava	5
Nové Zámky	11	Svidník	5
Poprad	11	Ružomberok	4
Prešov	11		

Tab. 4 - Početnosť výskytu v optimálnych umiestneniach pre 11 súborov (pre rôzne  $q$ ), pre 103 kandidátov a pre  $p=20$

Názov	Početnosť	Názov	Početnosť
Bratislava-Staré Mesto	11	Kráľovský Chlmec	11
Senica	11	Humenné	11
Trnava	11	Žilina	11
Piešťany	11	Námestovo	11
Nitra	11	Poprad	9
Dunajská Streda	11	Ružomberok	9
Nové Zámky	11	Trenčín	7
Topoľčany	11	Považská Bystrica	7
Levice	11	Rimavská Sobota	7
Prievidza	11	Košice-Juh	7
Zvolen	11	Stropkov	7
Martin	11	Brezno	4
Lučenec	11	Košice-Západ	4
Banská Bystrica	11	Čadca	4
Rožňava	11	Dubnica nad Váhom	4
Spišská Nová Ves	11	Stará Lubovňa	2
Prešov	11	Veľký Krtíš	2
Bardejov	11	Liptovský Mikuláš	2
Michalovce	11	Kežmarok	2

Tab. 5 - Početnosť výskytu v optimálnych umiestneniach pre 11 súborov (pre rôzne  $q$ ), pre 103 kandidátov a  $p=30$

#### 4. ZÁVER

Trvanie výpočtu uvedená deformácia výraznejšie neovplyvnila. V hodnotách účelovej funkcie nastali isté odchýlky - chyby, ktoré čiastočne rastú s parametrom  $q$ , vplývajúcim na mieru zaokrúhľovania. To spôsobuje zmena v usporiadaní obcí podľa veľkosti požiadaviek. Obciam s požiadavkami pre  $b_j$  menšími ako  $q$  sa požiadavky relatívne zväčšia (zaokrúhlenie nahor), obciam s požiadavkami väčšími ako  $q$  sa naopak zmenšia (zaokrúhlenie nadol). K najväčšej deformácii hodnôt účelovej funkcie dochádza pre hodnoty  $p$ , ktoré sú bližšie k stredu intervalu  $\langle 1, \text{počet kandidátov} \rangle$ . Naopak, pre  $p$  blízke 1 alebo mohutnosti množiny kandidátov, sa rozdiely znižujú. Najhoršie prípady nastali pre také hodnoty  $p$ , kde bola veľká množina kombinácií výberu umiestnení. Ani v najhorších prípadoch však miera chyby v riešených úlohách pre 103 kandidátov nebola väčšia ako 2,6% z hodnoty pôvodnej účelovej funkcie. Rozdiely v umiestnení stredísk pri rovnakom  $p$  boli s narastajúcim skreslením  $q$  málo výrazné. Obyčajne sa líšili po prekročení istej hodnoty  $q$ , a to obyčajne len výmenou v niektorom mieste umiestnenia oproti riešeniu, ktoré odpovedalo predchádzajúcej testovanej hodnote  $q$ . Tak napríklad pre  $p=15$  sú umiestnenia odpovedajúce parametrom  $q=1$  až  $q=500$  zhodné, po malej zmene sú zhodné riešenia pre  $q=650$  až  $q=800$  a rovnako zhodné sú riešenia pre  $q=950$  až  $q=1400$ . V prípade väčšieho počtu požadovaných umiestnení  $p$  obsahovali optimálne riešenia obyčajne všetky umiestnenia z menej početných množín. Zmeny spočívajú obyčajne nahradením jedného miesta iným, nachádzajúcim sa v danom regióne. Na umiestnenie stredísk v skutočnosti majú vplyv aj iné než ekonomické parametre. Myslíme si preto, že výsledky, ktoré sme získali zaokrúhlením požiadaviek, môžu slúžiť ako podklad pre ďalšie strategické rozhodovanie rovnako dobre, ako výsledky úlohy s pôvodnými hodnotami požiadaviek.

*Tento príspevok vznikol za podpory výskumného grantu VEGA 1/3775/06.*

#### POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ERLINKOTTER, D.: A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location. *Operations Research*, Vol. 26, No 6, 1978, 992-1009.
- [2] JANÁČEK, J.: The Medical Emergency Service System Design. In: *Mikulski, J. Advances in Transport Systems Telematics*, Katowice, Publisher Jacek Skalmierski Computer Studio, 2006, pp 443-449.
- [3] JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A.: An Impact of Transportation Network Topology on Time Consumption of an Exact Algorithm for Distribution System Design. In: *ZESZYTY NAUKOWE, Nr 1691*, November 2005, Wydawnictwo politechniki Śląskiej, p.175-180, PL.

Recenzent: doc. Ing. Josef Volek, CSc.  
Univerzita Pardubice, DFJP, Katedra informatiky v dopravě