

VYUŽITÍ NĚKTERÝCH METOD TEORIE GRAFŮ PŘI ŘEŠENÍ DOPRAVNÍCH PROBLÉMŮ

Markéta Brázdová ¹

Anotace: Metody operačního výzkumu mají při řešení praktických problémů široké využití. Článek se zabývá problematikou využití algoritmů z oblasti teorie grafů při řešení různých typů dopravních úloh. Shrnuje nejznámější metody z této oblasti, stručně je charakterizuje a naznačuje jejich možné využití v dopravní problematice.

Klíčová slova: optimální cesty na grafech, kostra grafu, eulerovský tah, hamiltonovská kružnice, toky na síti, lokační úlohy, okružní jízdy

1. ÚVOD

Aparát teorie grafů je důležitým prostředkem pro zachycení a analýzu struktury systému, algoritmy optimalizace na grafech slouží k řešení rozsáhlé třídy matematických modelů operačního výzkumu. Jednou z nejčastěji vyhledávaných skupin algoritmů s širokým uplatněním zejména v oblasti silniční dopravy jsou algoritmy pro hledání optimálních cest na grafech. Také další oblasti teorie grafů (konstrukční úlohy na grafech, metody hledání kritické cesty, problematika okružních jízd apod.) mohou sloužit jako kvalitní teoretická základna řešení problémů z oblasti dopravy. Většina algoritmů má heuristický charakter.

2. HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍCH CEST NA GRAFECH

Rozeznáváme tři základní typy úloh o hledání optimálních cest. Pro všechny typy úloh předpokládáme neorientovaný, souvislý, hranově ohodnocený graf, který představuje schematické znázornění dopravní sítě.

2.1. Hledání nejkratší cesty

Úlohy o hledání nejkratší cesty (někdy je nejkratší cesta označována také jako minimální cesta) mohou být dále rozčleněny takto:

- hledání nejkratší cesty z daného počátečního vrcholu do daného koncového vrcholu
- hledání nejkratší cesty z daného počátečního vrcholu do všech ostatních vrcholů grafu (popř. hledání nejkratší cesty ze všech ostatních vrcholů do daného koncového vrcholu)
- hledání minimální cesty mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu

K řešení prvních dvou typů úloh se používají Dijkstrov algoritmy. Pro hledání minimální cesty mezi libovolnými dvěma vrcholy se užívá Floydův algoritmus. Jeho

¹ Ing. Markéta Brázdová, Ph.D., Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, katedra informatiky v dopravě, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Tel. +420 466 036 519, E-mail: marketa.brazdova@upce.cz

výsledkem je matice vzdáleností mezi vrcholy (distanční matice), s využitím této matice a matice přímých vzdáleností lze pak snadno určit i minimální cestu mezi vybranými dvěma vrcholy.

Algoritmy pro hledání nejkratší cesty mají v silniční dopravě rozsáhlé použití. Podle charakteru úlohy může být graf hranově ohodnocen vzdáleností mezi vrcholy, náklady na přepravu apod.

2.2. Hledání nejspolehlivější cesty

Pro hledání nejspolehlivější cesty se využívá algoritmus hledání nejkratší cesty z počátečního do koncového vrcholu. Hrany grafu jsou ohodnoceny pravděpodobnostmi úspěšného nebo neúspěšného průchodu příslušnou hranou. Při ohodnocení pravděpodobností neúspěšného průchodu hranou je třeba ji přepočítat na pravděpodobnost úspěšného průchodu hranou, algoritmus uvažuje právě tuto pravděpodobnost úspěchu. V silniční dopravě se může jednat např. o pravděpodobnost, s jakou na daném úseku komunikace nedojde k nehodě, pravděpodobnost, že nenastane krizová situace apod.

Úloha se pomocí logaritmické funkce převede na úlohu nalezení nejkratší cesty, spolehlivost cesty se pak určí podle vztahu:

$$s(m(u, v)) = \prod_{h \in m(u, v)} p(h)$$

kde $p(h) \in \langle 0, 1 \rangle$ je pravděpodobnost úspěšného průchodu hranou h s krajními vrcholy u, v ,

$s(m(u, v))$ je spolehlivost cesty $m(u, v)$.

2.3. Hledání cesty s maximální kapacitou

Pro hledání cesty s maximální kapacitou se používá známý algoritmus využívající řezových množin a krácení hran. Cesta s maximální kapacitou se hledá na faktorovém podgrafu sestaveném z hran zkrácených v průběhu řešení, kapacita cesty se určí podle vztahu:

$$K(m(u, v)) = \min_{h \in m(u, v)} \{o(h)\}$$

kde $m(u, v) \in M$ je cesta z množiny všech cest mezi vrcholy u a v ,

$o(h)$ je kapacita hrany h ,

$K(m(u, v))$ je kapacita cesty $m(u, v)$.

Algoritmus pro hledání cesty s maximální kapacitou lze v silniční dopravě použít především při hledání trasy pro přepravu nadrozměrných nákladů.

Předchozí typy úloh lze také navzájem kombinovat. Příkladem může být přeprava nadrozměrného nákladu. Nejdříve je třeba určit všechny cesty ze zdrojového do cílového vrcholu, po nichž je možné náklad přepravovat. Je-li těchto cest několik, vybere se z nich taková, pro kterou jsou náklady na přepravu (popř. vzdálenost) minimální. V tomto případě bude tedy nejdříve použit algoritmus pro hledání cesty s maximální kapacitou, jestliže bude

nalezeno více možných cest, vybere se z nich optimální podle algoritmu pro hledání nejkratší cesty. Podobně lze kombinovat také algoritmus hledání nejspolehlivější a nejkratší cesty.

3. SÍŤOVÁ ANALÝZA

Síťová analýza je disciplína teorie grafů, která je zaměřena na analýzu projektů. Projektem se rozumí soubor časově vymezených činností, nutných k dosažení určitého cíle. Činnosti jsou mezi sebou navzájem propojeny technologickými a organizačními návaznostmi. Modelem projektu je síťový graf (speciální typ orientovaného grafu). Cílem síťové analýzy je nalezení kritických činností (jde o takové činnosti, jejichž prodloužením by se oddálil termín dokončení celého projektu), popř. zjištění dalších údajů (rezervy činností apod.).

K nejčastěji užívaným metodám síťové analýzy patří metody CPM a PERT. Metoda CPM se používá pro časovou analýzu deterministicky ohodnocených síťových grafů, kromě určení kritických činností se zjišťují i časové rezervy činností. Metoda PERT slouží k analýze stochasticky ohodnocených síťových grafů, také k určení pravděpodobnosti záporné časové rezervy ve vrcholech a pravděpodobnosti dodržení (překročení) plánovaného termínu dokončení projektu, případně jeho etapy.

4. KONSTRUKČNÍ ÚLOHY NA GRAFECH

4.1. Kostra grafu

Kostra grafu je vlastně vzájemné propojení všech míst na síti, které nesmí obsahovat kružnici. Pro hranově ohodnocené grafy lze sestavit minimální, popř. maximální kostru grafu. Úlohu o hledání minimální kostry grafu lze aplikovat např. při hledání nejlevnějšího propojení dané oblasti telefonním kabelem, dopravní sítí apod. Také v určitých krizových situacích je algoritmus hledání kostry grafu využitelný.

Příkladem může být krizová situace, při níž dojde k částečnému nebo úplnému zneprůchodnění dopravních komunikací (sněhová kalamita, zasypaní, zatopení apod). Pro zajištění nejnutnějšího spojení mezi určenými strategicky významnými body je třeba alespoň částečně obnovit komunikační síť tak, aby každý ze strategických bodů byl propojen s ostatními. Známe vzdálenosti mezi vrcholy sítě, rychlost každého typu vozidla, který bude v dané situaci použit, a předpokládáme, že potřebný počet odklízecích mechanismů bude předem rozmístěn na určená stanoviště. Ohodnocení hran udává vzdálenosti mezi krajními vrcholy hrany, a protože při krizové situaci je nejdůležitějším hlediskem čas, bude v tomto případě nutné vzdálenost přepočítat na čas potřebný k zprůjezdění hrany (pomocí rychlostí jednotlivých typů vozidel). Nalezením minimální kostry tohoto grafu se určí komunikace, které mají být přednostně zprůjezděny, aby byly vrcholy sítě navzájem propojeny co nejrychleji.

4.2. Eulerovský tah

Eulerovský tah je tvořen posloupností vrcholů a hran grafu, každá hrana grafu se v eulerovském tahu vyskytuje právě jednou. Eulerovský tah může být uzavřený nebo otevřený. Uzavřený eulerovský tah lze sestavit pomocí Fleuryho algoritmu na grafu, který má všechny vrcholy sudého stupně. Tah projde každou hranou grafu právě jednou, začíná i končí ve stejném vrcholu. Otevřený eulerovský tah se konstruuje na grafu, který má právě dva vrcholy lichého stupně. Začíná v jednom z vrcholů lichého stupně, projde každou hranou grafu právě jednou a vrátí se do druhého z vrcholů lichého stupně. Také při konstrukci otevřeného eulerovského tahu v grafu se dvěma vrcholy lichého stupně lze použít upravený Fleuryho algoritmus.

Pro konstrukci uzavřeného eulerovského sledu v grafu se sudým počtem vrcholů lichého stupně se používá Edmonsnův algoritmus. V tomto případě nelze sestavit eulerovský tah (posloupnost vrcholů a hran, v níž se každá hrana vyskytuje právě jednou), ale pouze tzv. eulerovský sled, ve kterém se budou některé hrany vyskytovat dvakrát. Je-li graf hranově ohodnocený, má význam hovořit o minimálním (popř. maximálním) eulerovském sledu (sled, který má minimální, popř. maximální součet ohodnocení hran). Praktický význam má především tento typ úloh, kde je důležitý správný výběr hran, po kterých bude nutno projít dvakrát, aby se minimalizovala nákladová funkce.

Úloha hledání uzavřeného eulerovského tahu je také známa jako úloha čínského pošťáka. Už z tohoto označení je zřejmá jedna z možných praktických aplikací problému. Pošťák vyjde z jednoho určeného vrcholu (poštovní úřad), projde každou ulicí ve svém rajónu a po skončení roznášky se vrací zpět do výchozího vrcholu. Další možnou praktickou aplikací úlohy je např. hledání optimální trasy čistícího vozu apod.

4.3. Hamiltonovská kružnice

Hamiltonovská kružnice je takový podgraf grafu, který je kružnicí a ve kterém se každý vrchol grafu vyskytuje právě jednou. Pro řešení praktických úloh na hranově ohodnocených grafech je opět důležité vyhledávání minimální, popř. maximální hamiltonovské kružnice, pokud existuje. Pro tuto úlohu je známo několik metod řešení, mezi nejznámější patří heuristický algoritmus určení hamiltonovské kružnice pro kompletní grafy nebo metoda větvení a mezí, ze které vychází známý Littlův algoritmus.

Úloha nalezení minimální hamiltonovské kružnice bývá také označována jako úloha obchodního cestujícího. Obchodní cestující má za úkol navštívit všechny vrcholy sítě (každý z nich právě jednou) a vrátit se zpět do výchozího vrcholu. Cílem je stanovit trasu obchodního cestujícího tak, aby celkové náklady byly minimální a aby cestující prošel každým vrcholem právě jednou. Obdobného charakteru jsou i možné praktické aplikace této úlohy.

5. TOKY V DOPRAVNÍCH SÍTÍCH

Dopravní sítě se v teorii grafů rozumí orientovaný, neorientovaně souvislý acyklický graf, ve kterém je každé hraně přiřazeno číslo $c[h]$ - kapacita (propustnost) hrany.

V dopravní síti je vždy pouze jeden zdroj (hrany z něj pouze vycházejí) a jedno ústí (hrany do něj pouze vcházejí).

Pro nalezení maximálního toku v rovinných sítích se používá jednodušší algoritmus založený na hledání nejvýše položené dráhy ze zdroje do ústí, maximální tok ve všeobecných a intervalově ohodnocených dopravních sítích se konstruuje pomocí Ford - Fulkersonova algoritmu (tento algoritmus lze ale použít i pro rovinné sítě).

Hledání maximálního toku v síti má v silniční dopravě význam při sledování proudů dopravních kompletů po síti apod. Ford - Fulkersonův algoritmus lze využít také pro řešení jednoduchého přiřazovacího problému.

6. LOKAČNÍ ÚLOHY

Lokační úlohy slouží k rozmístění středisek obsluhy na sítích. Jde o běžné komunikační sítě, kde vrcholy představují křižovatky komunikací, hrany jednotlivé úseky komunikací. Graf je hranově ohodnocený, ohodnocení vyjadřuje délku úseku. Kritériem optimalizace může být minimalizace dopravní práce nebo také minimalizace vážené excentricity. V prvním případě jde o úlohu, ve které jsou postupně obsluhovány všechny vrcholy, popř. hrany sítě a cílem je stanovit, do kterých vrcholů mají být depa umístěna. Umístění dep na hrany není v tomto případě efektivní. K řešení úlohy se používá iterativní algoritmus. Algoritmus je využitelný např. při rozmísťování stanovišť vozidel, skladů, skládek posypového materiálu pro zimní údržbu komunikací apod.

Jiným typem lokačních úloh je úloha, kdy je potřeba umístit středisko obsluhy na síti tak, aby byla minimalizována vážená excentricita. Za zjednodušeného předpokladu, že váhy (mohou představovat např. počet požadavků ve vrcholech) všech vrcholů jsou jednotkové, jde vlastně o to, aby i co nejvzdálenější vrchol byl co možná nejbliže k depu. Z praktických úloh tohoto typu je nejběžnější umístění stanovišť stanic rychlé záchranné služby nebo středisek hasičské záchranné služby. K řešení úlohy nalezení tohoto tzv. absolutního depa na síti se používá Hakimiho algoritmus.

7. OKRUŽNÍ JÍZDY

Problematika okružních jízd je zejména v silniční dopravě velmi aktuální. Jde o úlohu, kdy je třeba z jednoho nebo více stanovišť (dep) rozvézt požadované množství výrobků, materiálu, substrátu apod. do ostatních vrcholů sítě (obsluhované vrcholy). K dispozici je určitý počet vozidel se známou kapacitou. Každé vozidlo vyjíždí z depa a po průjezdu svou trasou se vrací zpět do místa, odkud vyjelo (tedy do stejného depa). Cílem je stanovit plán rozvozu tak, aby celkové náklady na rozvoz byly minimální.

Pro řešení jednodušší úlohy, kdy jde o rozvoz výrobků pouze z jednoho depa, se používá algoritmus Clarka a Wrighta. K řešení složitějších úloh s více depy je pak výhodné použít algoritmus autorů Tillmana a Caina.

8. ZÁVĚR

Metody operačního výzkumu mají při řešení praktických problémů široké využití. Jde převážně o metody heuristické - oproti exaktním metodám, které spočívají v prověření všech variant řešení, vypočtení hodnoty kritéria pro každou z nich a výběru optimálního řešení, se u metod heuristických nezjišťují všechny varianty řešení. Obzvláště u složitých úloh pak může dojít k situaci, že získané řešení není optimální, ale pouze suboptimální, většinou je však optimálnímu řešení velmi blízké. Pro složité úlohy by ale bylo použití exaktních postupů neefektivní, proto se obvykle dává přednost heuristickým metodám a postupům.

Při řešení každé úlohy je třeba problém důkladně analyzovat a zvolit vhodné postupy řešení. Praktická úloha může být složena z jednotlivých samostatně řešitelných částí, proto lze podle charakteru problému použíté metody také vzájemně kombinovat a doplňovat.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] DUDORKIN, J. *Operační výzkum*. Praha: ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02469-5.
- [2] DUDORKIN, J. *Systémové inženýrství a rozhodování*. Praha: ČVUT, 2003.
ISBN 80-01-02737-6.
- [3] KOLÁŘ, J.; ŠTĚPÁNKOVÁ, O.; CHYTIL, M. *Logika, algebry a grafy*. Praha: SNTL, 1989.
- [4] TUZAR, A.; MAXA, P., SVOBODA, V. *Teorie dopravy*. Praha: ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01637-4.
- [5] VOLEK, J. *Operační výzkum I*. Univerzita Pardubice: DFJP, 2002. ISBN 80-7194-410-6

Recenzent: doc. Ing. Jaroslav Kleprlík, Ph.D.

Univerzita Pardubice, DFJP, Katedra technologie a řízení dopravy