



# PŘÍČNĚ ZATĚŽOVANÁ VÁLCOVÁ SKOŘEPINA BEZ POČÁTEČNÍCH IMPERFEKČÍ – POROVNÁNÍ NUMERICKÉ ANALÝZY S EXPERIMENTEM

## LATERALLY LOADED CYLINDRICAL SHELL WITHOUT INITIAL IMPERFECTIONS – COMPARISON OF NUMERICAL ANALYSIS WITH EXPERIMENT

Ondřej Voltr<sup>1,\*</sup>, Petr Tomek<sup>2</sup>

---

**Abstrakt** Úkolem probíhajícího výzkumu je určení vlivu počátečních imperfekcí na ztrátu stability příčně zatěžované válcové skořepiny. Článek popisuje probíhající druhou fázi experimentálního ověření, která aktuálně sestává z ověření nově vyrobených experimentálních vzorků. Z tohoto důvodu se tento článek zaměřuje pouze na variantu modelu bez úmyslně vytvořené počáteční imperfekce. Porovnávají jsou výsledky geometricky a materiálově nelineární numerické analýzy (GMNA) s výstupy zatěžování dvou experimentálních modelů v univerzálním zkušebním stroji. Měřítkem shody je pak hodnota mezního zatížení, při kterém dochází ke ztrátě stability posuzované příčně zatěžované válcové skořepiny. Dále je posuzován i průběh a shoda jednotlivých zatěžovacích křivek. Pokud bude potvrzena dostatečně blízká shoda výsledků numerických analýz s výstupy nových experimentálních vzorků, pak bude umožněn následující krok druhé fáze experimentálního ověření, který bude spočívat v realizaci experimentů vzorků s úmyslně vytvořenou geometrickou počáteční imperfekcí.

**Klíčová slova** ztráta stability, experiment, MKP, válcová skořepina, sedlová podpora

**Summary** The aim of the current research is to determine the effect of initial imperfections on the loss of stability of a laterally loaded cylindrical shell. This paper describes the ongoing second phase of experimental verification, which currently consists of verification of newly produced experimental specimens. For this reason, this paper focuses only on a variant of the model without intentionally created initial imperfections. The results of geometrically and materially nonlinear numerical analysis (GMNA) are compared with the loading outcomes of two experimental models in a universal testing machine. The measure of conformity is then the value of the ultimate load at which the stability of the transversely loaded cylindrical shell under consideration is lost. Furthermore, the progress and conformity of the individual load curves is also assessed. If a sufficiently close agreement between the results of the numerical analyses and the outputs of the new experimental specimens is confirmed, then the next step of the second phase of experimental verification is enabled, which consists in carrying out experiments on specimens with a deliberately created geometric initial imperfection.

**Keywords** loss of stability, experiment, FEM, cylindrical shell, saddle support

---

<sup>1</sup> Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Katedra dopravních prostředků a diagnostiky, Studentská 95, 532 10 Pardubice, ČR

<sup>2</sup> Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Katedra mechaniky, materiálů a částí strojů, Studentská 95, 532 10 Pardubice, ČR

\* korespondenční autor, tel.: +420 466 036 463, e-mail: [ondrej.voltr@upce.cz](mailto:ondrej.voltr@upce.cz)

## 1 ÚVOD

Tematicky následující příspěvek patří do oblasti tenkostěnných skořepinových konstrukcí. Hlavním úkolem probíhajícího výzkumu je určit vliv geometrických počátečních imperfekcí na ztrátu stability příčně zatěžované válcové skořepiny (Voltr a Paščenko, 2013). Kde posuzovanou konstrukcí je část silniční automobilové cisterny uložené na sedlových podporách, např. dle (Paščenko a Stejskal, 2008), ze které byla vybrána část válcového pláště okolo jedné sedlové podpory. Po zjednodušení se tak úloha cisterny převede na případ výše zmíněné příčně zatěžované válcové skořepiny, ve shodě s (Křupka, 1987).

V první fázi experimentálního ověření nelineárních numerických analýz byl použit zkušební vzorek bez úmyslně vložené počáteční imperfekce a byla dosažena poměrně dobrá shoda výsledků (Voltr a Tomek, 2019). V této druhé fázi experimentálního ověření byla naplánována výroba dalších vzorků, včetně rozdílných geometrických parametrů sedla. Nicméně vzhledem ke změně výrobce zajišťujícího výrobu experimentálních modelů je úkolem tohoto článku nejprve ověřit dostatečnou shodu těchto „nových“ vzorků s výsledky odpovídající numerické analýzy. Ověřovaným modelem je varianta bez úmyslně vytvořené počáteční imperfekce s úhlem opásání sedla o hodnotě  $2\theta = 120^\circ$ . Až teprve po tomto zhodnocení může následovat pokračování této fáze.

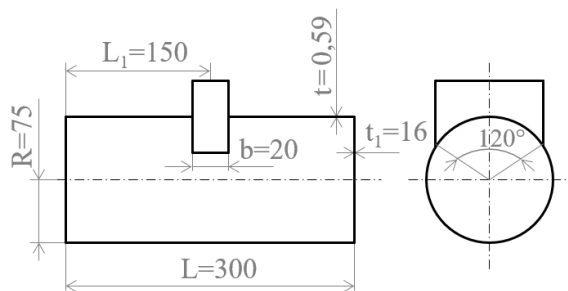
Na dané variantě geometrických parametrů je hlavním cílem ověřit shodu chování numerického modelu prostřednictvím nelineární numerické analýzy, resp. experimentálních modelů zatěžovaných v univerzálním zkušebním stroji. V článku jsou tak nejprve uvedeny geometrické parametry vybrané varianty, poté následuje podrobnější popis obou modelů (numerického i experimentálního), se závěrečným vyhodnocením a porovnáním zjištěných výsledků. Přičemž porovnání dosažených výsledků se zaměřuje na hodnotu mezního zatížení, při kterém dochází ke ztrátě stability. Dále je věnována pozornost i průběhům a shodě zatěžovacích křivek.

Pokud bude zjištěna dostatečná shoda výsledků numerických analýz s novými experimentálními vzorky, pak bude dalším krokem druhé fáze experimentálního ověření provedení experimentů i se vzorky s úmyslně vytvořenou geometrickou počáteční imperfekcí.

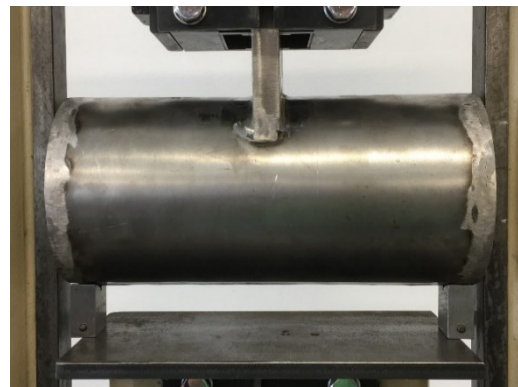
## 2 PARAMETRY MODELU PŘÍČNĚ ZATĚŽOVANÉ VÁLCOVÉ SKOŘEPINY

### 2.1 Geometrické parametry modelu

V základu se jedná o tenkostěnnou válcovou skořepinu o poloměru  $R = 75 \text{ mm}$ , délce  $L = 300 \text{ mm}$  a tloušťce stěny pláště skořepiny  $t = 0,59 \text{ mm}$ . Parametr tenkostěnnosti vybrané varianty modelu tak odpovídá hodnotě  $R/t = 127,1$ . Uprostřed délky válcového pláště skořepiny je pevně přivařeno sedlo o šířce  $b = 20 \text{ mm}$  a úhlu opásání  $2\theta = 120^\circ$ . Válcová část skořepiny je na obou koncích uzavřena přivařením plochých kruhových vík o tloušťce  $t_1 = 16 \text{ mm}$ . Poměrně značná tloušťka obou vík a šířka sedla zajišťují dostatečnou tuhost, aby se zabránilo jejich nadměrným deformacím a tím ovlivnění procesu deformace při zatěžování nebo numerickém výpočtu. Základní geometrické parametry modelu sledované příčně zatěžované válcové skořepiny jsou zobrazeny na obr. 1 (Voltr a Tomek, 2019).



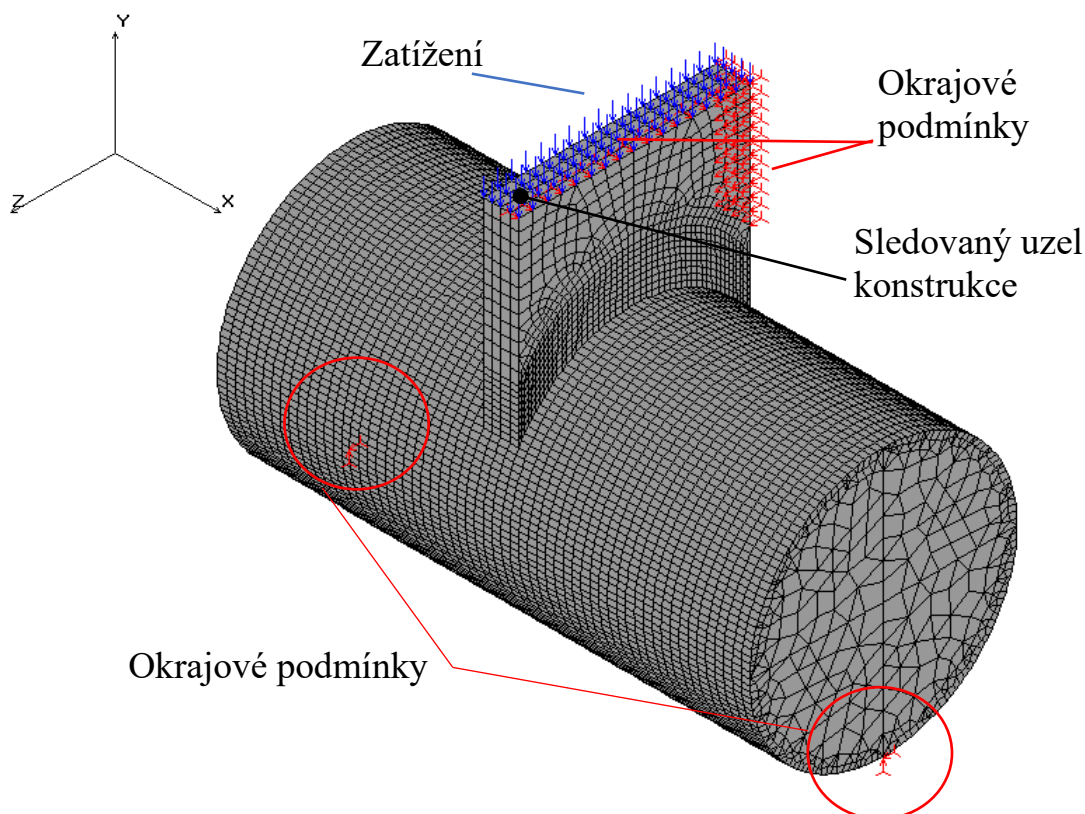
Obr. 1 Geometrické parametry numerického a experimentálního modelu; zdroj: autoři.



Obr. 2 Experimentální model (varianta  $2\theta=120^\circ$ ) uložený v univerzálním zkušebním stroji ZD 10/90; zdroj: autoři.

## 2.2 Numerický model

Numerický model ideální příčně zatěžované válcové skořepiny má shodné parametry s modelem popsaným na obr. 1. Okrajové podmínky uložení numerického modelu byly vybrány v kombinaci zamezení vybočení sedla z vertikálního směru a zamezení posuvů  $u_y, u_z$  ve dvou krajních uzlech prvkové sítě ve spodní oblasti vík válcové části skořepiny. Zatížení je do numerického modelu zavedeno svislou silou, která při zatěžování působí na válcovou skořepinu prostřednictvím horní plochy sedla. Nedeformovaný numerický model včetně okrajových podmínek, působícího zatížení a sledovaného bodu konstrukce je na obr. 3.



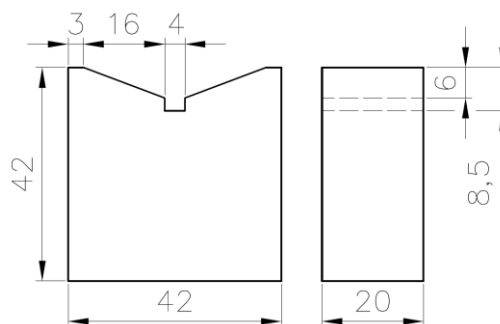
Obr. 3 Numerický model ideální skořepiny; zdroj: autoři.

Pro dosažení porovnatelnosti chování skutečného modelu při experimentu s nelineárními numerickými analýzami je nutné zohlednit, že skutečná skořepina při experimentu samozřejmě obsahuje obě nelinearity (geometrickou i materiálovou), které od sebe nelze oddělit. Proto je třeba výsledky experimentů porovnávat s výsledky nelineární numerické analýzy, která bude zohledňovat, jak geometrickou nelinearitu (velké posuvy), tak i nelinearitu materiálovou (plasticitu). Numerický výpočet je tudíž proveden s využitím plně nelineární analýzy GMNA, pro kterou je použit von Misesův bilineární model pružně-plastického chování materiálu s mezí kluzu  $R_{p0,2} = 173,5 \text{ MPa}$ . Pro elastickou oblast je uvažován modul pružnosti  $E = 1,9 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  a pro plastickou oblast nepatrné zpevnění prostřednictvím tangenciálního modulu  $E_T = 19 \text{ MPa}$ . Pro výpočet je dále uvažováno Poissonovo číslo o hodnotě  $\mu = 0,3$ . Zvolenou variantou strategie řízení iteračního procesu byla metoda přírůstku oblouku zatěžovací křivky. Pro numerickou analýzu je sestavena mapovaná síť skládající se z čtyřuzlových skořepinových elementů typu SHELL4T. Jak již bylo popsáno v úvodu, numerický model uvedené ideální skořepiny neuvažuje žádné úmyslně vložené počáteční imperfekce. Numerická analýza byla provedena v počítačovém programu COSMOS/M (version 2.95, 2010), založeném na metodě konečných prvků (MKP).

### 2.3 Experimentální model

Experimentální zkušební model posuzované válcové skořepiny bez úmyslně vložené počáteční imperfekce má taktéž shodné parametry s modelem popsáním na obr. 1. Nedeforovaný experimentální model je na obr. 2, na kterém je dále možné vidět způsob uložení zkušební vzorku v univerzálním zkušebním stroji ZD 10/90. Pro jeho uložení byla použita základní deska o tloušťce  $12 \text{ mm}$ , na které byla umístěna dvojice kovových podpěr. Geometrie uvedených podpěr, které podpíraly vzorky vždy pod okraji skořepiny v oblasti tuhých vík, je znázorněna na nákresu na obr. 4. Uspořádání uložení vzorku v této podobě mělo v průběhu zatěžování umožnit případné mírné natočení a posun vzorku v příčném směru (ve směru osy  $z$ ).

Neboť při vyhodnocení dříve provedených sérií numerických analýz (Voltr a Paščenko, 2013) byl často pozorován tvar ztráty stability, při kterém plášť skořepiny mírně vybočoval ve směru osy  $z$ . Proto bylo při realizaci okrajových podmínek uložení experimentálního vzorku snahou dosáhnout shody s numerickým modelem a případně tak toto vybočení umožnit. Je ale třeba poznamenat, že experimentální vzorek vůbec vybočovat ve směru osy  $z$  nemusí. Jelikož tento vzorek může obsahovat neúmyslné počáteční imperfekce z výroby, které způsobí, že vzorek ztratí stabilitu v jiném tvaru (např. symetrickém). Dále je i prokázáno, že jednomu meznímu stavu může odpovídat více tvarů ztráty stability (Blaschut a Galletly, 1995, Wunderlich a Albertin, 2002), tvar ztráty stability je velmi citlivý i na malou změnu vstupních parametrů výpočtu (což neplatí pro mezní zatížení). Proto je vyhodnocení shody výsledků experimentů a numerických analýz zaměřeno primárně na hodnoty mezního zatížení, které by samozřejmě mělo být odpovídající.



Obr. 4 Nákres podpěry použité pro uložení experimentálního vzorku; zdroj: autoři.

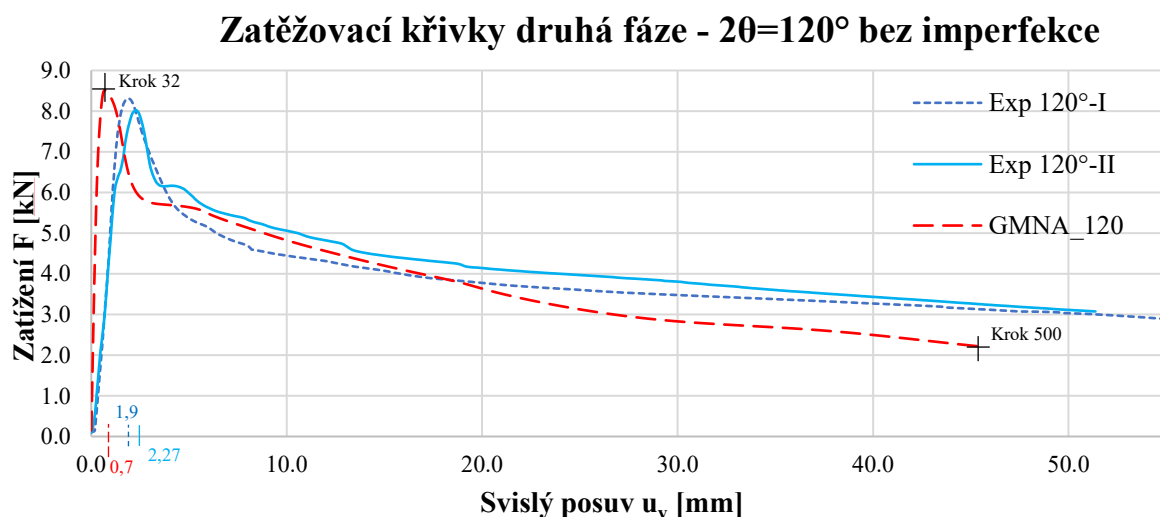
### 3 VYHODNOCENÍ A POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ

Níže je provedeno postupné zhodnocení výsledků numerické analýzy modelu ideální skořepiny a výsledků zatěžování dvou experimentálních modelů. Porovnání dosažených výsledků se soustředí na průběh zatěžovacích křivek, se zaměřením na hodnoty mezního zatížení, při kterém dochází ke ztrátě stability. V obou případech nebyla uvažována žádná úmyslně vložená počáteční imperfekce.

#### 3.1 Numerický model – výsledky

Po provedení plně nelineární numerické analýzy GMNA, na výše popsaném modelu ideální příčně zatěžované válcové skořepiny, je prostředkem k zobrazení výsledků tzv. zatěžovací křivka, která je uvedena na obr. 5. Jedná se o závislost zatížení  $F$  působícího na sedlo a svislého posuvu  $u_y$  vybraného bodu na horní ploše sedla.

Na záznamu průběhu zatěžování na obr. 5 je vidět jedna výrazná ztráta stability, přičemž po dosažení vrcholu zatěžovací křivky dochází k výraznému poklesu únosnosti konstrukce. Ztráta stability nastala při výpočtovém kroku 32, kterému odpovídá mezní zatížení  $F_{GMNA\_120} = 8512 \text{ N}$  a hodnota svislého posuvu  $u_y = 0,70 \text{ mm}$ . Přibližně od výpočtového kroku 83 ( $F = 5759 \text{ N}$ ,  $u_y = 2,97 \text{ mm}$ ) přechází zatěžovací křivka z prudkého poklesu do pozvolnějšího klesání. Výpočtová procedura byla ukončena po dosažení výpočtového kroku 500 ( $F = 2204 \text{ N}$ ,  $u_y = 45,68 \text{ mm}$ ).



Obr. 5 Zatěžovací křivky – porovnání numerického a experimentálních modelů  $120^\circ$ -I, II; zdroj: autoři.

#### 3.2 Experimentální model – výsledky

Průběh zatěžovacích křivek dvou experimentálních vzorků s úhlem opásání  $2\theta = 120^\circ$  byl získán vnesením naměřených hodnot do grafu. Soubor hodnot vždy obsahoval informace o zatížení sedla společně s odpovídající hodnotou svislého posuvu spodních čelistí univerzálního zkušebního stroje ZD 10/90. Pro názornost jsou obě křivky vyneseny společně se zatěžovací křivkou z numerické analýzy (viz obr. 5).

Zatěžovací křivka experimentálního modelu označeného „ $120^\circ$ -I“ na obr. 5 ukazuje, že během procesu zatěžování došlo k jedné významné ztrátě stability. Konkrétně ke ztrátě stability došlo při mezním zatížení  $F_{EXP\_I} = 8313 \text{ N}$ , čemuž odpovídala hodnota svislého posuvu  $u_y = 1,9 \text{ mm}$ . Zatěžování bylo ukončeno při hodnotě svislého posuvu  $u_y = 56,05 \text{ mm}$ . Zatěžovací křivka experimentálního modelu označeného „ $120^\circ$ -II“ se na první pohled od varianty „ $120^\circ$ -I“ mírně odlišuje. Ztráta stability nastává později a při nižším mezním zatížení  $F_{EXP\_II} = 8023 \text{ N}$ , při  $u_y = 2,27 \text{ mm}$ . Zatěžovací křivka není tak plynulá a přibližně

při posuvu  $u_y = 4,13 \text{ mm}$  se objevuje náznak druhé ztráty stability, který nejspíše ovlivnil charakter průběhu zatěžování až do konce experimentu ( $u_y = 51,38 \text{ mm}$ ).

### 3.3 Porovnání výsledků

Zatěžovací křivky numerického a experimentálních modelů s úhlem opásání  $2\theta = 120^\circ$  je možné porovnat s využitím obr. 5. Všechny tři zatěžovací křivky vykazují podobný průběh, včetně hodnot, které se hlavně v první polovině mění v relativně úzkém rozmezí. V oblasti první ztráty stability mají zatěžovací křivky z pohledu tvaru křivky relativně shodný průběh. Nicméně konkrétní okamžik ztráty stability se mírně liší, jak hodnotou mezního zatížení, tak i hodnotou svislého posuvu sedla, při kterém ztráty stability nastaly (viz tab. 1).

Tab. 1 Porovnání mezních zatížení experimentu a numerické analýzy; zdroj: autoři.

| Model/Parametr              | Mezní zatížení F [N]<br>( $F_{EXP_I}, F_{EXP_{II}}, F_{GMNA_{120}}$ ) | Relativní chyba $\delta$ [%] |
|-----------------------------|---|------------------------------|
| Experiment (120°-I)         | 8313  | 2,37 %                       |
| Experiment (120°-II)        | 8023  | 5,74 %                       |
| Numericky ideální skořepina | 8512  | -                            |

Ztráta stability ideální skořepiny získaná numerickou analýzou nastává nejdříve ze všech a zároveň při nejvyšší hodnotě mezního zatížení  $F_{GMNA_{120}} = 8512 \text{ N}$ . Zatímco ztráta stability u obou experimentů nastala později a při nižším mezním zatížení. Numerický model vykazoval od počátku zatěžování mírně vyšší tuhost, kterou reprezentoval sklon lineární části zatěžovací křivky. Možným vysvětlením tohoto rozdílu a pozvolnějšího sklonu lineární části zatěžovací křivky by mohlo být počáteční vymezení vůlí v uložení experimentálního modelu a také vymezení vůlí při snímání posuvů na kleštinách zkušebního stroje. Hodnota mezního zatížení však tímto ovlivněna nebyla. Odlišnost od reality je třeba samozřejmě hledat i na straně numerického modelu, např. použitím zjednodušeného modelu chování materiálu bez významného zpevnění v pružně-plastické oblasti u nelineární analýzy.

Rozdíly je možné sledovat i mezi oběma výstupy z experimentů. Vzorek „120°-I“ byl prvním vyrobeným vzorkem série a sloužil hlavně k otestování procesu výroby. Což se projevilo při procesu zatěžování, kde u vzorku „120°-I“ došlo v pozdějších fázích zatěžování k porušení svarového spoje v oblasti připojení tuhých vík k plášti skořepiny (ve spodní části skořepiny na obou koncích). Na základě těchto zjištění, byly další vzorky, včetně vzorku „120°-II“, ještě dodatečně upravovány v oblasti svarových spojů sedlo-plášť i víka-plášť skořepiny.

Z pohledu charakteru zatěžovacích křivek jsou si hlavně zpočátku podobnější křivka z numerické analýzy a vzorek II, včetně náznaku zpomalení/zastavení poklesu okolo hodnoty svislého posuvu přibližně  $u_y = 4 \div 5 \text{ mm}$ . S dále narůstajícím vtlačováním sedla do pláště skořepiny zatěžovací křivka z numerické analýzy klesá rychleji než obě křivky z experimentů, které se k sobě postupně přibližují. Pokud by nebyl zastaven záznam zatěžování, je možné, že by se k sobě průběhy experimentálních křivek blížily až limitně.

Avizované možné vybočení ve směru osy z nebylo při experimentech ve významné míře pozorováno. Důvodem bude pravděpodobně tření mezi kontaktními plochami, které mohlo způsobit, že došlo ke ztrátě stability v jiném než očekávaném tvaru (symetrický, namísto vybočení ve směru osy z).

## 4 ZÁVĚR

Tento článek pojednává o problematice příčně zatěžované válcové skořepiny bez uvažovaných počátečních imperfekcí, přičemž porovnává výsledky plně nelineární numerické analýzy s experimentálními výsledky.

Porovnáním zatěžovacích křivek numerického a dvou experimentálních modelů lze formulovat dílčí závěry. Z hlediska průběhu jsou si všechny uvedené zatěžovací křivky do značné míry podobné (viz obr. 5). Nejen blízkou oblastí první ztráty stability, která se příliš neliší, ale také tvarem křivky okolo tohoto mezního bodu. Včetně nejsledovanějšího parametru – hodnoty mezního zatížení při ztrátě stability – dosahujícího v případě numerické analýzy pouze mírně vyšší hodnoty než u obou experimentů. Avšak rozdíl těchto hodnot se pohybuje pouze v jednotkách procent (viz tab. 1). Uvedené shrnutí tak naznačuje poměrně dobrou shodu výsledků numerické analýzy a experimentů.

Přesto lze ve výsledcích samozřejmě najít i určité rozdíly. Ztráta stability ideální skořepiny nastává podle numerické analýzy dříve, než při experimentech (z pohledu hodnot svislých posuvů sedla  $u_y$ ), což je dáno mírně vyšší tuhostí numerického modelu oproti experimentům v počátcích zatěžování. Pravděpodobným vysvětlením těchto rozdílů je počáteční vymezení vůlí v uložení experimentálních vzorků, stejně jako vymezení vůlí při snímání posuvů na kleštinách zkušebního stroje. U nelineární analýzy má určitě také vliv použití zjednodušeného modelu chování materiálu bez významného zpevnění v pružně-plastické oblasti. Zde si je dále vhodné připomenout, že numerický model je z hlediska geometrie opravdu ideální bez nepřesností. Naopak každý reálný experimentální vzorek je do jisté míry originálem, a proto každý experimentální model bude z výroby do jisté míry obsahovat menší či větší neúmyslně vložené imperfekce. Vliv má i kvalita provedení svarového spoje atd.

Nicméně, ověření dostatečné shody numerické analýzy s novými experimentálními vzorky bylo splněno. Dalším krokem bude experimentální ověření vzorků s úmyslně vytvořenou počáteční imperfekcí.

## Literatura

Blaschut, J. a Galletly, G.D. **1995**. Buckling Strength of Imperfect Steel Hemispheres. *Thin-Walled Structures, Special Issue on Buckling strength of Imperfection-Sensitive Shells (23)*, s. 1-20. [https://doi.org/10.1016/0263-8231\(95\)00001-T](https://doi.org/10.1016/0263-8231(95)00001-T)

FEM Computer program COSMOS/M, version 2.95, 2010.

Křupka, V. **1987**. Buckling and limit carrying capacity of saddle loaded shells. *Proceedings of an International Colloquium on "Stability of Plate and Shell Structures"*. Ghent, 6. – 8. dubna. Ghent, Belgium: Ghent University, s. 617-622.

Paščenko, P. a Stejskal, P. **2008**. Cisterna NKA 46. Kontrola pevnosti – podklad k přípravě měření při jízdách zkouškách. *Vývojová zpráva AK-Mechanika, s.r.o.*, Pardubice, Česká republika.

Voltr, O. a Paščenko, P. **2013**. Initial imperfections of horizontal cylindrical shells on saddle supports. *Colloquium Hungary: proceedings of 30th International Colloquium on "Advanced Manufacturing and Repair Technologies in Vehicle Industry"*. Visegrád, 22. – 24. května. Budapešť, Hungary: Budapest University of Technology and Economics, s. 77-82.

Voltr, O. a Tomek, P. **2019**. The experimental verification of the laterally loaded cylindrical shell without initial imperfections. *Proceedings of 21st International Scientific Conference Applied Mechanics 2019*. Ostravice, 15. – 17. dubna. Ostrava, Česká republika: VŠB – Technická univerzita Ostrava, s. 224-227. ISBN 978-80-248-4287-5.

Wunderlich, W. a Albertin, U. **2002**. Buckling behaviour of imperfect spherical shells. *International Journal of Non – Linear Mechanics*, 37(4-5), s. 589-604. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00086-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00086-5)