*Perner'sContacts **18**(1), 2023*
DOI: 10.46585/pc.2023.1.2399

APLIKÁCIA TEÓRIE GRAFOV V LETECKEJ DOPRAVE

APPLICATION OF GRAPH THEORY IN AIR TRANSPORT

Hélia Némethová[1,*], Jan Zýka[2],

Abstrakt *Práca ja zameraná na aplikácie teórie grafov do leteckej dopravy – aké sú možnosti využitia a aplikácie grafov v leteckej doprave. Zaoberá sa analýzou, skúmaním a následne riešením aplikácie teórie grafov do leteckej dopravy pri plánovaní a optimalizácií letových ciest a toku letovej prevádzky. Pojednáva o jednotlivých vybraných metód použiteľných pri výpočte grafov. Cieľom práce je poukázať na možnú aplikáciu oboru teórie grafov do leteckej dopravy súvisiace s optimalizáciami letových tratí a toku letovej prevádzky.*

Kľúčová slova *letové cesty a trate, letová prevádzky, matice, optimalizácia, teória grafov, tok letovej prevádzky*

Summary *The paper is focused on the graph theory application into the field of air transportation – what are the possibilities of the graph application usage in the air transportation. It deals with the analysis, observation and then with the solution of the application of graph theory to air transport in the planning and optimization of flight path and air traffic flow.*

Keywords *air- ways and routes, air traffic, flight operations, matrices, graph theory optimization, air traffic flow management*

1 ÚVOD

Práca je zameraná na možné aplikácie a využitie teórie grafov do leteckej dopravy pri problematike plánovaní letových ciest a tratí a pri určení optimálnej letovej cesty.

Hlavnou úlohou práce je analyzovať teoreticko-praktické poznatky grafov a matíc a následne ukázať možnosť ich aplikácií do oboru letecká doprava.

Práca vychádza zo základného a aplikovaného výskumu, ktorý bol zameraný na prelínanie obsahu tematických oblastí matice, teórie grafov s leteckou dopravou. Z hľadiska objektívnej skutočnosti výskum je možné zaradiť do teoretického a empirického, nakoľko sa orientuje na zber a spracovanie poznatkov z uvedeného oboru a následne sa zameriava na ukážku metód konceptuálnej analýzy a syntézy, modelovania a špecifikácie riešenej problematiky.

[1]Panevropská Univerzita, a.s. (Vysoká škola obchodní, katedra letecké dopravy), Spálená 76/14, 110 00 Praha 1, Česká Republika
[2]Panevropská Univerzita, a.s. (Vysoká škola obchodní, katedra letecké dopravy), Spálená 76/14, 110 00 Praha 1, Česká Republika
[*]Korespondenční autor: Hélia Neméthová, e-mail: helia.nemethova@peuni.cz

Cieľom práce a výskumu je poukázať na možné aplikácie praktických metód využívania teórie grafov a matíc pri rýchlej tzv. ručnej optimalizácií a plánovaní tratí a minimalizácií chýb počas taktického plánovania príletov lietadiel.

Výsledkom výskumu a práce sú stanovené ukážky praktických príkladov a modelov na možné využitie a implementácie grafov do leteckej dopravy a ukážka užitočnosti oboru teórie grafov pri riešení problematiky plánovania letových ciest a trás a pomoc pri zvolení optimálnych letových tratí.

2 TEÓRIE GRAFOV

Teória grafov je matematický obor a je špeciálna časť kombinatorickej analýzy a úzko súvisí s aplikovanou matematikou a operačnou analýzou. Zaoberá sa štúdiom matematického útvaru – grafu.

Grafy sa používajú ako prostriedok pre modelovanie a popis reálnych sieťových systémov, ako sú doprava, vodné hospodárstvo, energetické siete, počítačové siete vrátane internetu, schémy pracovných operácií vo výrobných procesoch, stavebníctve a pod. Obsah menovaných operácií sa síce medzi sebou v mnohom sa odlišuje, avšak disponujú i so spoločnými rysmi a odrážajú určité prvky, ktoré sú vo vzájomných vzťahoch a väzbách.

Korene oblasti teórie grafov siahajú do 18. Storočia, kedy švajčiarsky matematik Leonard Euler v roku 1736 vyriešil najstarší a najznámejší grafový problém – označený ako „Úloha o siedmych mostoch mesta Královce". Tento už vyriešený matematický problém je založený na skutočnom mieste a na skutočnej situácii. Spomínaný problém a jeho obecné riešenie zverejnený v Comentarii Academiae Petropolitanae má pre teórie grafov do dnešného dňa zásadný význam a je označovaný ako jeho počiatok.

Je možné zhrnúť, že aparát teórie grafov a na ňom založené algoritmy optimalizácie grafov predstavujú veľmi užitočné techniky teórie dopravných systémov využívajúcich vlastné prístupy a postupy pre riešenie optimalizačných úloh so špeciálnou štruktúrou matematických modelov.

Hlavnýmcieľom týchto optimalizačných úloh je hľadanie minimálnych kostier sietí, hľadanie optimálnych trás a tratí v sietí (minimálne, maximálne, najkratšie, najdlhšie, najlacnejšie trate a podobne), stanovenie priepustnosti a maximálnych tokov v sieti, navrhovanie trás a tratí a ďalšie.

2.1 Základné poznatky a pojmy v teórie grafov dôležité pre cestovanie po grafoch

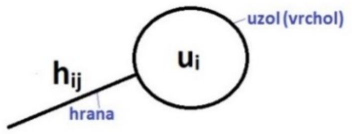
Každý graf pozostáva z istých častí, ktoré je nutné poznať pre správne nakladanie s grafmi. Medzi základné prvky grafu patria množina uzlov a hrán.

V tejto kapitole opísané základné poznatky sú dôležité pri aplikovaní teórie grafov do praxe, keď je nutné stanoviť letové cesty a trasy jednosmerné alebo obojsmerné a vypočítať najkritickejšiu a najkratšiu cestu. Nižšie uvádzané uzly sú základným prvkom grafov, kde uzly v letectve môžu zodpovedať hlásnym bodom, vstupnými alebo výstupnými bodmi, letiskami a hrany letových ciest alebo využiteľných ciest medzi uzlami, čiže bodmi. Orientácia hrán určuje v praxe, či letová cesta bude jednosmerná alebo obojsmerná a tak je možné pokračovať vo vypočítaní najkritickejších alebo najkratších ciest.

Uzly alebo vrchole sú prvky množiny U a sú miesta, v ktorých nastáva aspoň jeden z nasledujúcich možností:

- elementy vstupujú, vystupujú do systému, zhromažďujú sa
- tvoria alebo rušia sa komplety, alebo je s nimi manipulované.

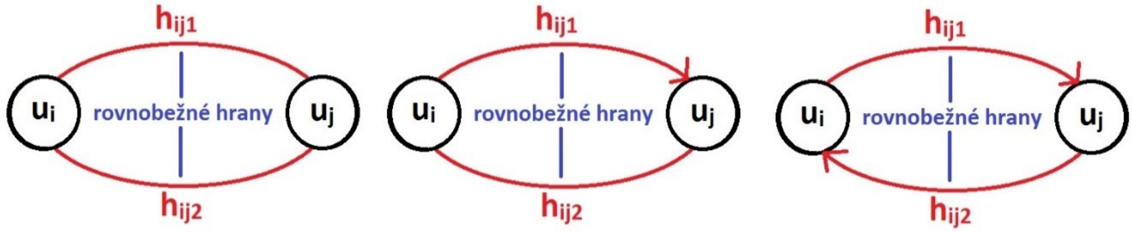
Hrany alebo čiary sú dvojice vrcholov pri neorientovanom grafe, usporiadané dvojice vrcholov pri orientovanom grafe a množina vrcholov pri multigrafe. Označujú sa ako „h_{ij}", alebo ako neusporiadané dvojice$[u_i, u_j]$. Sú to prvky množiny U. (Obr. 1)



Obr. 1 – Základné prvky grafov
[Zdroj: vlastný]

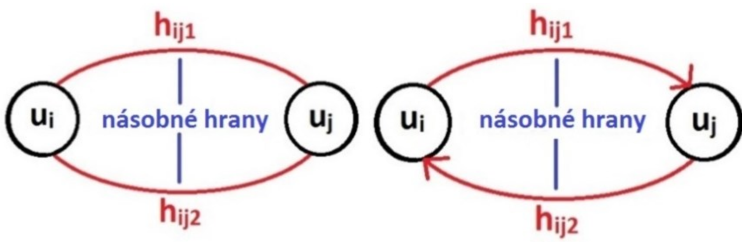
Orientovaná hrana je daná začiatočným a koncovým vrcholom, v grafe označované šípkou a je to usporiadaná dvojica (u_i,u_j).

Rovnobežné hrany sú minimálne dve hrany, ktoré spájajú tú istú dvojicu uzlov (vrcholov). (Obr. 2)



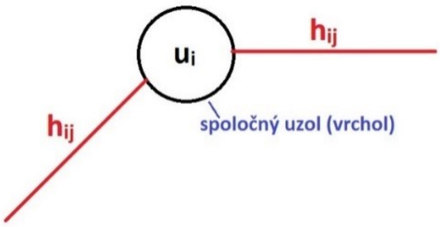
Obr. 2 – Rovnobežné hrany v grafe
[Zdroj: vlastný]

Násobné hrany sú najmenej dve rovnobežné hrany, ktoré začínajú a končia v tých istých uzloch. Od rovnobežných sa líšia tým, že buď všetky sú orientované alebo neorientované. (Obr. 3)



Obr. 3 – Násobné hrany v grafe
[Zdroj: vlastný]

Priľahlé hrany sú dva hrany, ktoré majú spoločný uzol. (Obr. 4)

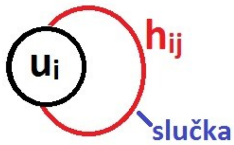


Obr. 4 – Priľahlé hrany v grafe
[Zdroj: vlastný]

Priľahlé (susedné) uzly sú dva uzly, medzi ktorými existuje hrana, ktorá ich spája (Obr. 5).

Obr. 5 – Priľahlé uzly v grafe
[Zdroj: vlastný]

Slučka je hrana, ktorá začína a končí v tom istom uzle (vrchole). Je incidenčná s jedným uzlom (Obr. 6).



Obr. 6 – Slučka v grafe
[Zdroj: vlastný]

Sled je striedavá postupnosť bezprostredne po sebe nasledujúcich vrcholov a hrán, ktorý začína a končí vo vrchole. Existujú dva typy sledov: otvorený a uzavretý sled. (Kašpar V., 1998)

Otvorený sled je sled, pri ktorom začiatočný (prvý) a konečný (posledný) vrchol (uzol) sledu sú rôzne. Platí $u_1 \neq u_n$.

Uzavretý sled je sled, pri ktorom začiatočný (prvý) a konečný (posledný) vrchol (uzol) sú totožné. Platí $u_1 = u_n$.

Ťah je sled, v ktorom sa neopakuje žiadna hrana.

Cesta je sled, v ktorom sa neopakuje žiaden vrchol (uzol).

Cyklus je uzavretá cesta a má aspoň jednu hranu. Neopakuje sa žiaden vrchol okrem začiatočného ktorý je súčasne konečným. Je to slučka.

Relácia je vzťah dvoch prvkov grafu s rovnakou dimenziou (hrana-hrana, uzol-uzol).
Incidencia je vzťah dvoch prvkov rôznej dimenzie (hrana-uzol). Uzol $u_i \in U$ je incidenčný s hranou $h_{ij} \in H$ grafu $G = [U, H]$, ak hrana h_{ij} začína alebo končí v uzle u_i. (Farrahi et al., 2017; Pastor a Tuzar, 2007; Kašpar V., 1998).

2.2 Typy grafov

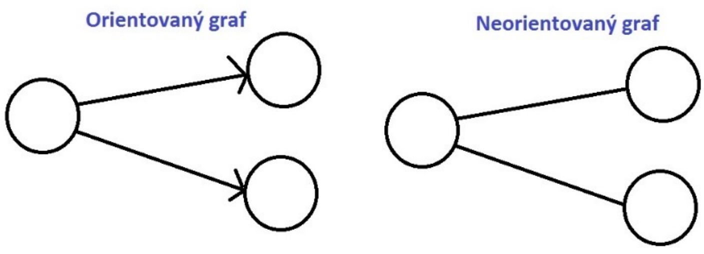
Graf je obrázok, ktorý vznikne pospájaním vrcholov (uzlov) spojitými čiarami (hrany).

Opis typov grafov je ďalšou teoretickou časťou práce, na ktoré je možné napojiť praktickú časť. V praxe ak je používaný graf orientovaný, tak jednoznačne a ľahko sa dajú stanoviť kritériá CPM metódou a je jasné, ktorým smerom sa letí. Ak sa jedná o neorientovaný graf, tak v praxe znamená, že trasy je možné využiť na obojstrannú prevádzku – ako je aj opísané v predchádzajúcej podkapitole pri orientácií hrán grafov. Zmiešaný graf v praxi značí jednosmernú a obojsmernú prevádzky, ktoré je možné využiť v rámci predpísaných pravidiel a s platnými legislatívami.

Stupeň v praxi dopomôže pri výpočte kritických alebo najkratších, respektíve najdlhších trás.

Typy grafov sa rozlišujú podľa orientovanosti ako orientovaný, neorientovaný alebo zmiešaný graf, podľa stupňa orgraf, digraf, multigraf a pseudograf, podľa kompletnosti kompletný (úplný) alebo konečný graf, ohodnotený graf.

Orientovaný graf má všetky jeho hrany orientované, zmiešaný graf obsahuje aj orientované aj neorientované hrany a neorientovaný graf má všetky jeho hrany neorientované. (Obr. 7)



Obr. 7 – Typy grafov podľa orientovanosti
[Zdroj: vlastný]

Stupeň môže byť:

- vnútorný (vstupný) sa označuje ako$deg^{-}(u)$ a udáva počet hrán vstupujúcich do vrcholu u.
- vonkajší (výstupný) sa označuje ako $deg^{+}(u)$a udáva počet hrán vystupujúcich z vrcholu u.

Platí, že $\deg(u) = deg^{-}(u) + deg^{+}(u)$.

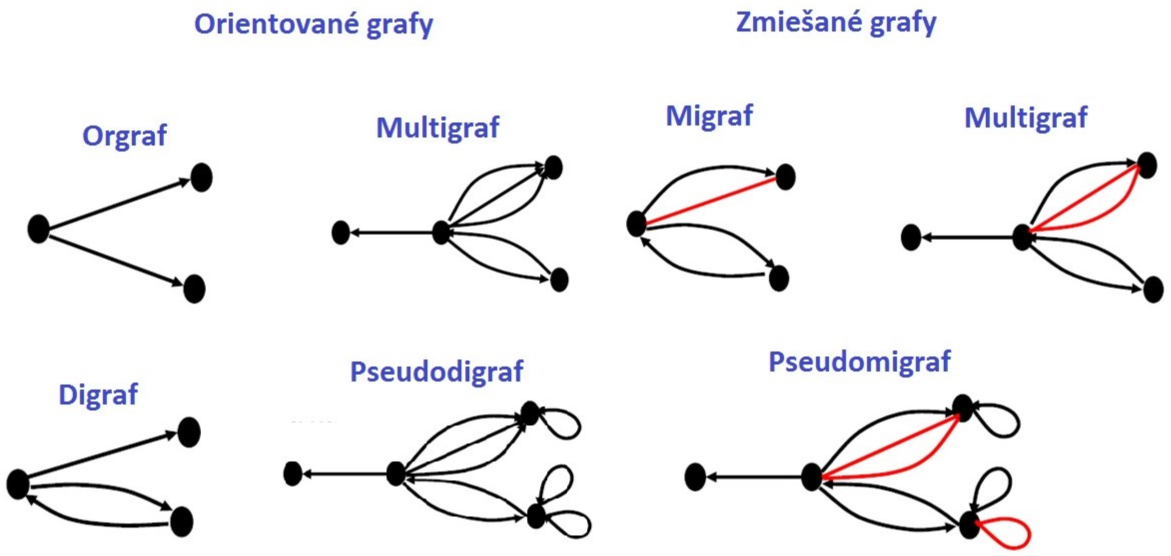
Zobrazenie typov grafov podľa stupňa sú nasledujúce:

Orgraf je najjednoduchší graf. Neobsahuje rovnobežné, násobné hrany, ani slučky.

Digraf alebo migraf pri zmiešaného grafu je typ grafu, ktorý už obsahuje rovnobežné hrany, ale neobsahuje násobné hrany, ani slučky.

Multigraf už obsahuje rovnobežné a násobné hrany, ale ešte neobsahuje slučky.

Pseudodigraf alebo pseudomigraf pri zmiešaného grafu obsahuje všetky typy hrán – rovnobežné, násobné hrany a aj slučky.



Obr. 8 – Typy grafov
[Zdroj: vlastný]

Teórie grafov úzko súvisia s maticami, ktoré sa najlepšie dajú aplikovať do praxe pre stanovenie najkratšej a najvhodnejšej cesty medzi bodmi (fixy ak sa jedná o FRA) alebo medzi letiskami ak sa jedná o „cieľový bod“. Podobne ako pri FRA z hľadiska smerovania sú jednosmerné alebo obojsmerné (neorientované) trate, tak aj pri stanovení matíc sú orientované alebo neorientované grafy. Pomocou matíc je možné určiť či medzi vrcholmi (uzlami) existuje hrana (cesta) alebo nie, či inciduje s hranou, či vstupuje alebo vystupuje hrana z vrcholu a determinovať najkratšiu alebo najlacnejšiu cestu, trať z bodu do bodu.

3 SÚČASNÉ VYUŽÍVANIE TEÓRIE GRAFOV V LETECKEJ DOPRAVE

Problematikou využitia teórie grafov v leteckej doprave po celom svete sa zaoberá rada výskumných inštitúcií a pracovníkov, ktorí špecificky skúmajú hlavne optimalizačné úlohy v letovej prevádzke. Napríklad autori zo School of Civil Engineering and Geosciences, Newcastle University (Dunna Wilkinson, 2016) publikovali vedeckú prácu predstavujúcu adaptívnu stratégiu pre zvýšenie odolnosti siete letových tratí. Z pohľadu Air Traffic Managementu je možno teóriu grafov aplikovať do sektorizácie vzdušného priestoru, prípadne do oblasti pracovnej záťaže riadiacich letovej prevádzky (Farrahi et al., 2017). Táto metóda je ďalej rozpracovaná v článku.

Autori Mora-Camino, Lamiscarre a Mykoniatis (2021) sa naopak zaoberajú pomerne neprebádaným problémom návrhu dopravných sietí, ktoré je možné integrovať do urbanizovaných priestorov, tak aby bolo možné efektívne vykonávať logistiku nákladu a v budúcnosti i osôb pomocou bezpilotných lietadiel. V článku „Application of Graph Theory In Air-Transportation Network“ (Solai Rani&Muhammed Owais, 2021) autori navrhujú riešenie praktického problému nájdenia minimálneho spanningového stromu pomocou Kruskalova algoritmu a prehľadávanie grafov Dijkstrovým algroritmom. Cieľom je definovať najkratšiu vzdialenosť medzi dvoma letiskami. Teóriu grafov je možné aplikovať aj do ekonomických disciplín leteckej dopravy (Khalef, a El-Adaway, 2022). Tieto štúdie poskytujú prehľad o výdavkoch v rámci projektu Airport Improvement Program a vytvárajú metodiku založenú na identifikácií kľúčových slov jednotlivých pracovných činností, ich vektorizácie do referenčnej matice rozdelené podľa úrovne financovania, konštrukcii sietí grafov a následnou vizualizáciou a interpretáciou získaných dát.

Článok „A Graph Analysis of Aviation Enroute Network“ (O. Ivashchuk, I. Ostroumov, N. Kuzmenko, 2022) diskutuje o využívaní teórie grafov pri špecifikovaní požiadaviek používaní letových ciest a ich konfigurácií. Numericky analyzujú letové cesty nad Ukrajinou a vyhodnocujú. Ďalší článok pojednáva o grafickom konštrukčnom metóde pomocou teórie grafov pri „risk managemente“ v letectve. (Qiang Zhaq, Qing Li, Jingqian Wen, 2018) Autori Changhong Hu, S. Xiao, Luya Gao a Mingyang Liu v článku sa sústreďujú na Americký systém leteckej dopravy a spôsobené meškania, kde je tiež možné využiť teóriu grafov. (Changhong Hu, S. Xiao, Luya Gao a Mingyang Liu, 2022)

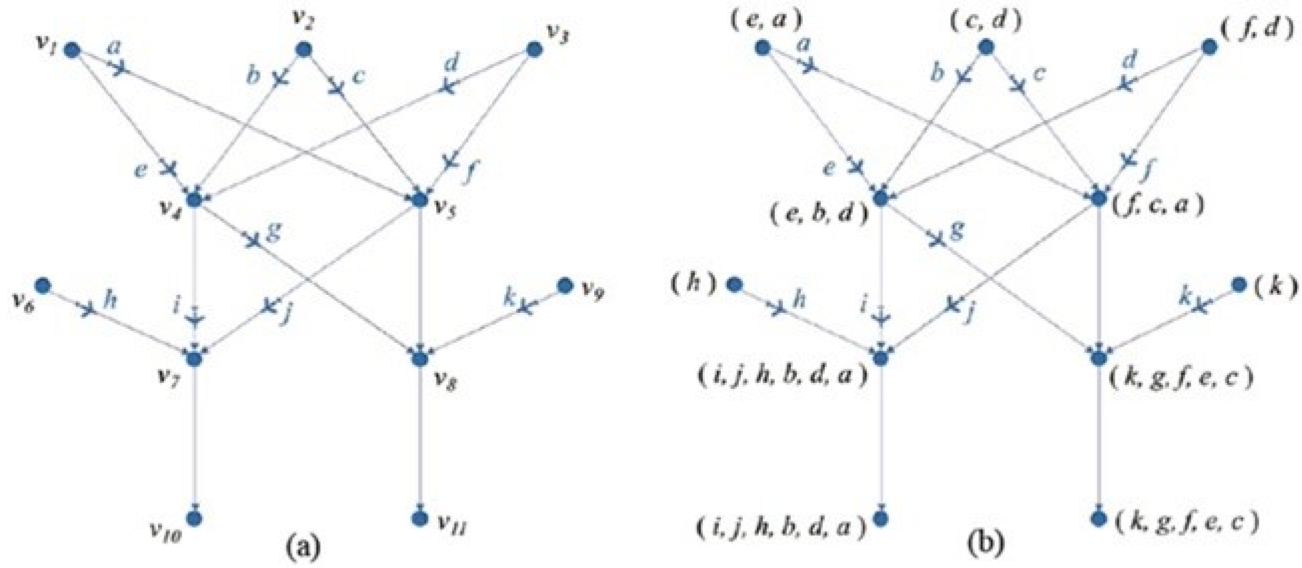
Rovnakú metódu aplikujú autori Bínová H. a Kalačayová M. (2022) pre hodnotenie európskej siete letových tratí pomocou identifikácií a hodnotení najfrekventovanejších európskych letísk pravidelnou leteckou dopravou.

Vzhľadom na to, že letecká doprava je najrýchlejšie sa vyvíjajúci obor a z dôvodu zvyšovania sa počtu lietadiel vo vzdušnom priestore, kladie nárok na potrebu zvýšenia kapacity letových ciest a vzdušného priestoru. V roku 2017 NASA prišla iniciatívou MESAR (Method to Enhance Scheduled Arrival Robustness)– Metóda na zvýšenie odolností plánovaného príletu, kde prvotne využíva obor teórie grafu na načrtnutie modelu riešenia. Vychádzalo to z faktov, aby sa čo najlepšie dali eliminovať nepredvídané okolnosti negatívne vplývajúce na chod a plynulosť letísk z prevádzkových aspektov. Medzi najviac vyskytujúce sa na prevádzku negatívne vplývajúce nepredvídané okolnosti patria: MAPt, tzv. off-nominal podmienky alebo zaradenie a prispôsobenie núdzových letov do príletových tratí a plánov. Všetky nepredvídané prílety môžu mať negatívny vplyv na plynulý chod a sled naplánovaných príletov a preto je nutnosť ich riešenia, aby sa predišli zvýšením meškaní, spotreby paliva a ekonomických nákladov.

3.1 Ukážka aplikácie teórie grafov pri presnom priblížení na pristátie – návrhový postup NASA

Najvyššia spotreba paliva lietadla je pri odlete a priblížení, pri zaraďovaní sa do sledu na pristátie. Preto je dôležité stanoviť najkratšiu trať v poslednej fáze letu (priblíženie a pristátie) a sled prilietavajúcich lietadiel. Touto problematikou sa zaoberá MSDA model od NASA (Farrahi et al., 2017).

Predpokladá sa súbor F letov lietajúcich pozdĺž ich príletových tratí na pristátie určených dráh. Pristávajúce trate môžu byť reprezentované priamym acyklickým grafom, kde V je súbor vrcholov (okrajových bodov) predstavujúcich začiatok alebo koniec segmentov trás, ktoré symbolizujú fixy. Pristávajúce lietadlá sú znázornené na obrázku malými písmenami. Na základe prevádzkových parametrov lietadlá pristávajú v slede za sebou a tie sledy súvisia. Obrázok a) označuje graf smerovania príletov po letových tratí a obrázok b) znázorňuje sled pristávajúcich lietadiel prelietavajúcich fixy (uzly v).(Obr. 9)



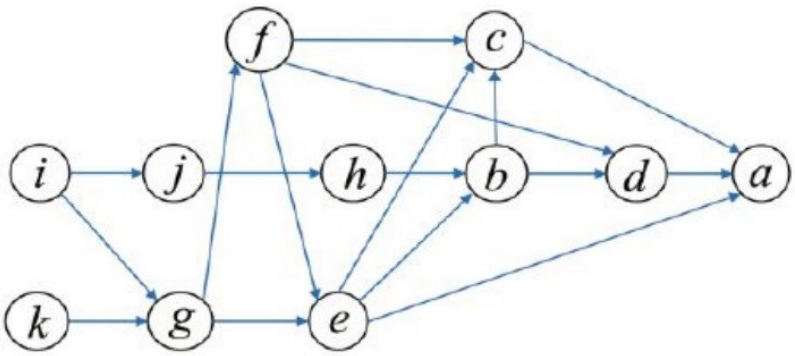
Obr. 9–Grafový model na pristátie lietadiel pri problematike MSDA
[Zdroj: Farrahi et al., 2017]

Na riešenie problematiky MSDA je uvedený efektívny algoritmus schematicky vyjadrený pomocou tabuľky a grafom. V prvom rade je potrebné definovať závislosť grafu $G_D=(V_D, H_D)$, kde $V_D = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je obor vrcholov (uzlov). Vrcholy u_i korešpondujú s letmi $f_i \in \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Existuje hrana v rámci H_D z uzlu u_i do uzlu u_j ak let f_i priamo závisí od letu f_j. To znamená, že ak lety f_i a f_j sú plánované letieť cez tie isté fixy na trati v grafe, majú medzi sebou súvis a nadväznosť v poradí. Tab. 1 a Obr. 10 znázorňuje konštrukciu Grafu závislostí pre riešenie MSDA problematiky.

Tab. 1 – Identifikácia priamej súvislosti letov na základe MSDA problematiky
[Zdroj: Farrahi et al., 2017]

Vertex	Flight arrival sequence at the vertex	Direct dependencies
v_1	(e, a)	$e \rightarrow a$
v_2	(b, c)	$b \rightarrow c$
v_3	(f, d)	$f \rightarrow d$
v_4	(i, g, e, b, d)	$i \rightarrow g \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow d$
v_5	(f, c, d)	$f \rightarrow c \rightarrow a$
v_6	(h)	–
v_7	(i, j, h, b, d, a)	$i \rightarrow j \rightarrow h \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$
v_8	(k, g, f, e, c)	$k \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow c$
v_9	(k)	–
v_{10}	(i, j, h, b, d, a)	$i \rightarrow j \rightarrow h \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$
v_{11}	(k, g, f, e, c)	$k \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow c$

Prvý stĺpec tabuľky zobrazuje vrcholy (uzly ktoré sú fixy), druhý predstavuje sekvenciu lietadiel prelietavajúcich fixy a posledný stĺpec je znázornenie priamej súvislosti medzi prilietavajúcimi lietadlami. Z vyššie uvedenej tabuľky sa dá skonštruovať Graf závislosti (Obr. 10).



Obr. 10 – Graf závislosti súvisiace s problematikou MSDA
[Zdroj: Farrahi et al., 2017]

Graf závislosti je jasné znázornenie Tab. 1 ako jednotlivé lety priamo súvisia a sledu pristávajúcich lietadiel. Z grafu je vidno, že ako prvé pristávajú lietadlá označením „i" a „k", za ktorými nasledujú lietadlá označením "j", "g„ a ďalšie.

Konštrukcia grafu má niekoľko benefitov. V prvom rade umožňuje odhalenie charakteristiky závislosti medzi letmi a následne použitie grafových algoritmov. V AIAA AVIATION je vysvetlené: dôležité je zvážiť inštanciu modelu MSDA a nechať byť G_D jeho korešpondovaným závislým grafom. Pre každú dvojicu lietadiel $f_i, f_j \in F$ s korešpondujúcimi vrcholmi $v_i, v_j \in V_D$existuje $f_i \rightarrow f_j$,ak je priama trať v G_D z v_i do v_j. (Farrahi et al., 2017)

Predpokladá sa, že existuje priama trať $P_{ij} = (u_0, u_1, u_2, ..., u_p)$ v grafe závislostí z v_i do v_j, kde $u_0 = v_i$ a $u_p = v_j$. Uvažuje sa s vrcholmi $(u_0, u_1, u_2, ..., u_p)$ a s hranami (u_0, u_1), (u_1, u_2), ..., (u_{p-1}, u_p) v trati a s korešpondujúcimi letmi $f_{u_0}, f_{u_1}, f_{u_2}, \cdots, f_{u_p}$.

Z toho vyplýva, že $f_i = f_{u_0} \rightarrow f_{u_1} \rightarrow f_{u_2} \rightarrow \cdots \rightarrow f_{u_{k-1}} \rightarrow f_{u_k} = f_j$, ktoré zahrňuje $f_i \rightarrow f_j$.

Ak existuje $f_i \rightarrow f_j$, potom existuje aj sekvencia letov $F_i = (f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_k})$ v MSDA modeli, kde platí, že $f_i = f_{i_0}$ a $f_j = f_{i_k}$ pre všetky $a \in \{0,1,\dots,k-1\}$, let f_{i_a} priamo závisí s letom $f_{i_{a+1}}$. To znamená, že existuje priama cesta v grafe G_D z uzlu u_{a_i} do uzlu u_{a_j}, a preto V_D korešponduje s letmi F_{ij}.

Na základe vyššie uvedených faktov sa dá určiť či existuje priama trať z bodu (uzlu) do bodu (uzlu), či sa navzájom korešpondujú uzly s hranami v trati a následne lety a či existuje závislosť medzi lietajúcimi letmi po určitých tratiach (hranách) a bodoch (uzloch) a tak aj sled letov.

Z grafu odvodený algoritmus slúži na integráciu do simulačného prostredia použitého v systéme C/C++, simulácie v reálnom čase, na účel minimalizovania porúch plánovania a aktualizácie príletu lietadiel počas taktického plánovania.

4 PRAKTICKÁ APLIKÁCIA TEÓRIE GRAFOV V LETECKEJ DOPRAVE

Praktické využitie teórie grafov v doprave môže mať úlohy rozdelené do dvoch hlavných skupín:

- Navrhovanie dopravných sietí a výber podsietí
- Úlohy o dopravných prúdoch.

Pri prvej skupine sa rozumie konštrukcia úplne novej, neexistujúcej siete a výber istej podsiete, ktorá spĺňuje určité kritériá.

Pri druhej kategórie sa jedná hlavne o výbere optimálnych trás, tratí už v existujúcich sietí. Pri optimálnosti trás sa rozumie výber takých tratí, ktoré zodpovedajú očakávaným parametrom pri využívaní tratí – najlacnejšia, najkratšia, najrýchlejšia apod. cesta.

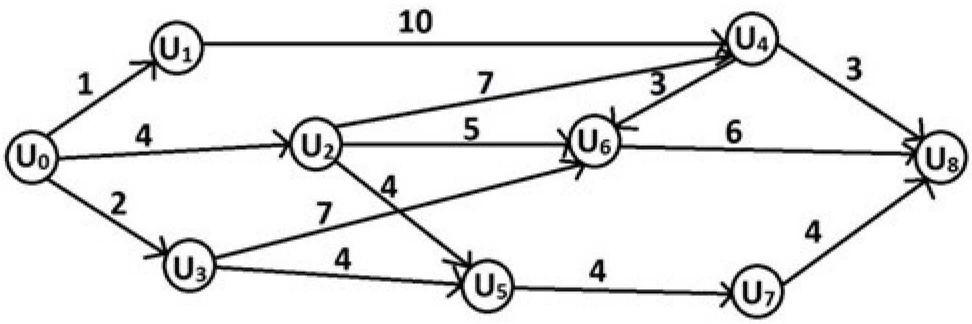
Optimálne trasy v sieti hľadáme z dôvodu, aby boli minimalizované náklady nutné pre uskutočnenie cesty (hovorí sa o minimálnych vzdialenostiach trasy).

Podobne ako teória grafov, aj operačná a systémová analýza sa zaoberá riešením optimalizácií tratí v doprave.

4.1 Stanovenie optimálnych trás v leteckej doprave pomocou teórie grafov

Pri hľadaní optimálnych trás sa berie do úvahy, aby cesta bola čo najspoľahlivejšia, najkratšia, následne najlacnejšia a najekonomickejšia a pri vytváraní nových tratí sa zohľadňuje aj maximálna kapacita.

Na hľadanie optimálnej trasy pomocou teórie grafov poukazuje nasledujúci príklad. Sú dané cesty z bodu do bodu, ktoré sú znázornené modelovým cvičným grafom (Obr. 11).



Obr. 11 – Hranovo orientovaný, ohodnotený graf na znázornenie tratí
[Zdroj: vlastný]

Z teoretického hľadiska graf je orientovano - hranovo ohodnotený graf. Hrany grafu znázorňujú dĺžku trate v námorných míľach. Pomocou teórie grafov sa dá určiť najkratšia cesta prostredníctvom pomocnej tabuľky nasledovne:

Tab. 2–Tabuľka pri výpočte najkratšej trate v teórie grafov
[Zdroj: vlastný]

	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
D	0	0+1	0+4	0+2	1+10 4+7	4+4 2+4	4+5 2+7 4+7+3	2+4+4	1+10+3 4+7+3 4+5+6 4+4+4+4 2+4+4+4
D	0	1	4	2	11 11	8 6	9 9 14	10	14 14 15 16 14

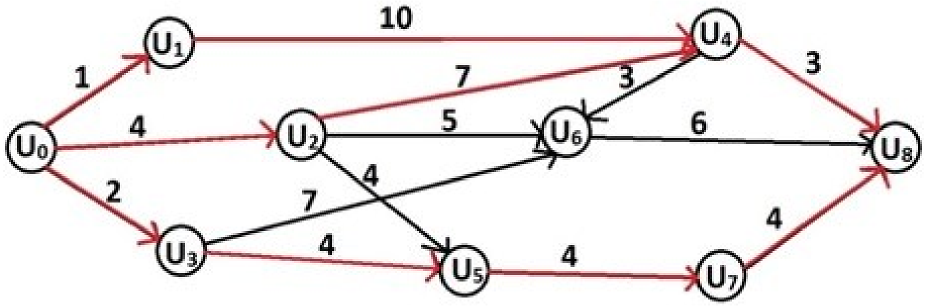
najkratšie cesty z bodu U_0

Červenou farbou sú označené najkratšie trasy z bodu U_0 do ďalších bodov. To znamená, že z bodu U_0 do bodu U_8 najkratšia cesta bude mať dĺžku 14 námorných míľ. Najkratšiu vzdialenosť medzi jednotlivými bodmi (uzlami) znázorňuje tabuľka 2 (Tab. 3).

Tab. 3 – Tabuľka najkratšej cesty z bodu
[Zdroj: vlastný]

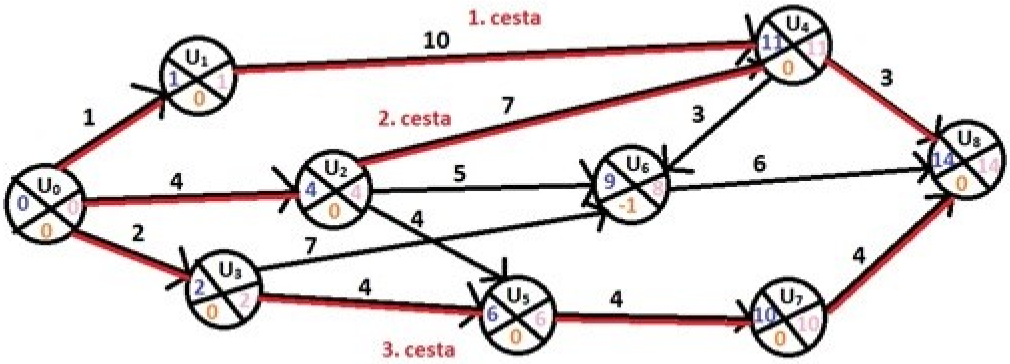
	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
U_0	0	1	4	2	11	6	9	10	14
U_1	-	0	-	-	10	-	13	-	13
U_2	-	-	0	-	7	4	5	8	11
U_3	-	-	-	0	-	4	7	8	12
U_4	-	-	-	-	0	-	3	-	3
U_5	-	-	-	-	-	0	-	4	8
U_6	-	-	-	-	-	-	0	-	6
U_7	-	-	-	-	-	-	-	0	4
U_8	-	-	-	-	-	-	-	-	0

Na Obr. 12 sú znázornené najkratšie cesty z prvého až do posledného uzla.



Obr. 12 – Možné najkratšie cesty v grafe z bodu U_0 do bodu U_8
[Zdroj: vlastný]

Výpočet najkratšej cesty prostredníctvom CPM metódy je možné znázorniť nasledovne:



Obr. 13 – CPM model
[Zdroj: vlastný]

Vyššie uvedená CPM metóda vypočítava najkratšie vzdialenosti od začiatočného bodu U_0 až do konečného bodu U_8. Na rozdiel od CPM metódy používaného v projektovom manažmente, kde z uzlu U_i do uzlu U_j sa počíta najdlhšia cesta, v tomto prípade je opačne - najkratšia cesta. Smerom z U_j do U_i pri projektovom manažmente sa počíta najkratšia cesta a v tomto prípade opäť opačne - najdlhšia cesta. V uzlu U_6 je vidno, že trasou cez tento uzol cesta by sa predlžila o 1 námornú míľu. Najkratšie trasy sú označené červenou farbou.

5 ZÁVER

Dosiahnuté výsledky aj bohatá publikačná činnosť rád výskumných inštitúcií ukazujú, že teória grafov poskytuje mocný rámec pre modelovanie, plánovanie a navrhovanie algoritmických riešení rôznych problémov vznikajúcich v leteckej doprave a pri riadení letovej prevádzky alebo toku letovej prevádzky. Dôkazom je aj ukážka používania modelu od NASA v kapitole 3 alebo tiež opis dôležitosti teórie grafov vo vedeckom článku „Application of Graph Theory in Air-Transportation Network" v časopise „Journal of Pure and Applied Mathematics" , kde je možné aplikovať ako na postupy a plánovanie letových ciest aldbo riadenia prevádzky, ATC. (Solai Rani P.& Muhammed Owais)

Kapitola 4 ukazuje ďalšie možnosti a metódy využívania a aplikácie teórie grafov, kde je možné dobre skombinovať aj s CPM metódou.

V leteckej doprave sa konštruujú nové letové trate alebo sa stanovujú optimálne trate (najkratšie, najúspornejšie a najekonomickejšie) pre let a prepravu cestujúcich, nákladu a pošty. V pre-flight briefing dokumentoch piloti už majú obsiahnuté systémom vygenerované najvýhodnejšie trate. Podobne ako pri konštrukcií nových tratí, aj pri plánovaní letu po tratiach, systémy pracujú na základe operačnej a systémovej analýza, programovania a pomocou teórie grafov. Stanovenie optimálnych tratí je kľúčovým faktorom pri minimalizovaní doby letu, spotrebu paliva, emisiu, dĺžku trate a meškaní a zaistenie usporiadaného a efektívneho toku riadenia letovej prevádzky.

Literatura

Dunn, S., &Wilkinson, S. M. **2016**. Increasing the resilience of air traffic networks using a network graph theory approach. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 90, 39-50.

Farrahi, A. H., Goldberg, A. T., Bagasol, L., &Jung, J. **2017**. Applying graph theory to problems in air traffic management. In *17th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operation sConference* (p. 3775).

Kašpar V. **1998.***Vybrané metódy operačnej analýzy vo vojenskej doprave*. Žilina: FŠI ŽU

Khalef, R., & El-Adaway, I. H. **2022**. Understanding and Comparing the Different Fund Levels in Airport Improvement Projects: A Graph Theory Approach. In *Construction Research Congress 2022* (pp. 815-824).

Mora-Camino, F., Lamiscarre, B., & Mykoniatis, G. **2021**. Structuring Air Logistics Networks in the Urban Space. In SMART2021, *The Tenth International Conference on Smart Cities, Systems, Devices and Technologies.*

Pastor O. & Tuzar A. **2007**. *Teorie dopravních systémů*. Praha: ASPI, a.s.

Solai Rani P.& Muhammed Owais S.**2021.**Application of Graph Theory In Air-Transportation Network. *J Pur Appl Math,* 5(1), 1-4.

O. Ivashchuk, I. Ostroumov, N. Kuzmenko **2022**. *A Graph Analysis of Aviation Enroute Network*. IEEE. 2022 12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT). 10.1109/ACIT54803.2022.9913097

Qiang Zhaq, Qing Li, Jingqian Wen **2018**. *Construction and application research of knowledge graph in aviation risk field*. 2017 Asia Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ACMAE 2017). https://doi.org/10.1051/matecconf/201815105003

Changhong Hu, S. Xiao, Luya Gao a Mingyang Liu **2022**. *Tracing the spatial-temporal evolution dynamics of air traffic systems using graph theories*. International Journal of Intelligent Systems https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/int.22927

Bínová, H., & Kaločayová, M. **2022**. *METHODOLOGY OF THE STATUS ASSESSMENT OF AIR NETWORK*. *Perner's Contacts*, *17*(1). https://doi.org/10.46585/pc.2022.1.2225