

DEKOMPOZICE OKRUŽNÍCH JÍZD S VYUŽITÍM MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

DECOMPOSITION OF THE TOUR USING MATHEMATICAL PROGRAMMING

Petr Kozel¹

Anotace: Při řešení úloh zaměřených na obsluhu vrcholu dopravní sítě je nutné věnovat pozornost nejen optimální posloupnosti vrcholů s ohledem na zvolené optimalizační kritérium (např. celkovou ujetou vzdálenost), ale též dalším omezením, která plynou z potřeb praxe. Může se jednat například o nepřekročení kapacity obslužného vozidla. Předložený příspěvek je věnován využití dekompoziční metody využívající matematického programování, založené na tzv. Route-First Cluster-Second přístupu. V rámci této dvou krokové metody je nejprve hledána optimální trasa obslužného vozidla a teprve následně je tato trasa dekomponována na dílčí okružní jízdy při zohlednění kapacity obslužného vozidla. V textu jsou postupně prezentovány matematické modely, které lze k realizaci uvedeného přístupu využít. Celý dekompoziční postup je též ilustrován konkrétními příklady.

Klíčová slova: Route-First Cluster-Second, matematické programování, okružní jízdy, Xpress-Ive.

Summary: To solve tasks focused on the vertex service of the transport network, it is necessary to pay attention not only to the optimal sequence of vertices with respect to the selected optimization criterion (e.g. the total distance traveled), but also to other limitations that follow from the practical needs. The submitted contribution deals with introducing a decomposition method using mathematical programming based on the Route-First Cluster-Second approach. Firstly, the optimal route of the service vehicle is determined and then it can be decomposed into partial tours taking into account the capacity of the service vehicle. Mathematical models that can be used to implement this approach are presented in the text. The whole decomposition procedure is illustrated by specific examples, too.

Key words: Route-First Cluster-Second, Mathematical Programming, Vehicle Routing Problem, Xpress-Ive.

ÚVOD

Při řešení úloh zaměřených na obsluhu vrcholů dopravní sítě je nutné věnovat pozornost nejen optimální posloupnosti vrcholů s ohledem na zvolené optimalizační kritérium (např. celkovou ujetou vzdálenost), ale též dalším omezením, která plynou z potřeb praxe. Jedním z nejčastějších omezení, která vstupují do rozhodovacího procesu při tvorbě tras obslužných vozidel, je jejich kapacita. Při návrhu optimální trasy obslužného vozidla je nejčastěji hledána

¹ Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D., Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra matematických metod v ekonomii, Sokolská třída 33, 702 00 Ostrava 1, Tel.: +420 597 322 165, E-mail: petr.kozel@vsb.cz.

posloupnost vrcholů začínající a končící v depu, která prochází všemi vrcholy sítě, u nichž je vyžadována obsluha a mající minimální délku. Současně je vyžadováno, aby kapacita obslužného vozidla nebyla překročena. Pokud je splněna podmínka, že součet požadavků situovaných v jednotlivých vrcholech sítě nepřekročí kapacitu obslužného vozidla, je možné pro návrh trasy vycházet z úlohy o vyhledání minimální *Hamiltonovy kružnice* (1). Výslednou trasou obslužného vozidla je pak jedna okružní jízda začínající a končící v depu. Za předpokladu, že požadavek na nepřekročení kapacity obslužného vozidla není splněn, je nutné zvolit některý z náhradních přístupů, kterých existuje celá řada (2). Mezi dva základní náhradní přístupy patří:

- metoda primárního shlukování, označovaná jako *Cluster-First Route-Second* a
- metoda primárního trasování, označovaná jako *Route-First Cluster-Second*.

Obě metody patří mezi tzv. dekompoziční heuristické metody, které jsou realizovány ve dvou krocích: *tvorba shluků* a *návrh trasy*, které mají různé pořadí. U metody primárního shlukování je prvním krokem tvorba shluků s ohledem na kapacitu obslužného vozidla, teprve následně, ve druhém kroku, jsou ve vytvořených shlucích hledány optimální trasy, například s využitím úlohy o vyhledání minimální *Hamiltonovy kružnice*, a to buď exaktně, nebo heuristicky s ohledem na velikost úlohy. K počáteční tvorbě shluků lze opět využít řady přístupů, například tzv. stíracího algoritmu (3). U metody primárního trasování je naopak prvním krokem vyhledání optimální trasy při současném zanedbání omezující podmínky na kapacitu obslužného vozidla. Druhým krokem je pak dekompozice vyhledané trasy na jednotlivé okružní jízdy při současném zohlednění kapacity obslužného vozidla.

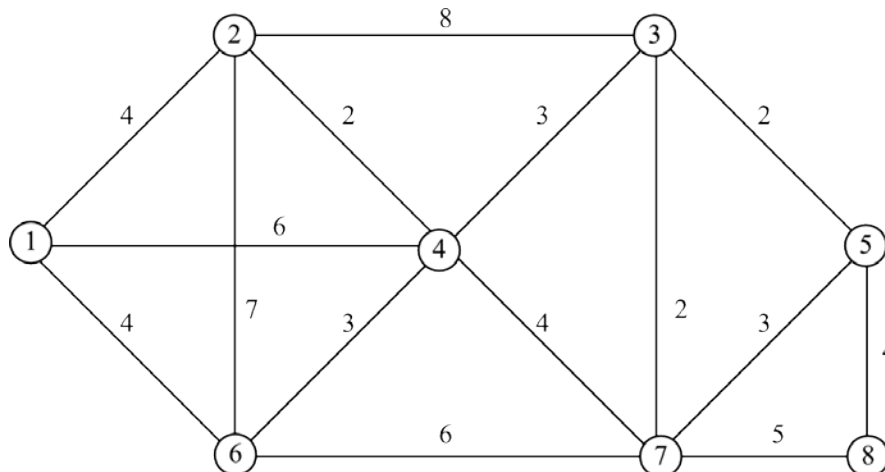
Předložený příspěvek si klade za cíl představit druhý ze základních přístupů – metodu primárního trasování, přičemž jednotlivé kroky této metody budou realizovány s využitím matematického programování.

1. FORMULACE PROBLÉMU

Je zadána síť $N(V, E, l)$, která vymezuje hranově ohodnocený graf. Tato síť má tři atributy. $V = 1, \dots, m$ představuje množinu vrcholů, $E = 1, \dots, n$ množinu hran a l_{ij} představuje ohodnocení hrany ij , kde $i, j \in V$ v podobě délky pozemní komunikace v kilometrech. Ve vrcholech $j = 2, \dots, m$ se nacházejí zákazníci s požadavky na obsluhu b_j kde $j = 2, \dots, m$. V počátečním vrcholu je pak situováno depo s , ze kterého obslužné vozidlo vyjíždí a zpátky se navrácí. Dále je zadána jeho kapacita K . Cílem je naplánovat množinu okružních jízd začínajících a končících v depu s tak, aby celková vzdálenost potřebná pro obsluhu zákazníků byla minimální a aby nebyla překročena kapacita obslužného vozidla. Příklad sítě $N(V, E, l)$, která je reprezentována hranově ohodnoceným grafem, zachycuje diagram, který je na obrázku č. 1 a zároveň poslouží jako vzorový příklad.

Dříve než bude pozornost věnována postupu řešení, budou doplněny informace ke vzorovému příkladu, na kterém bude celý postup řešení ilustrován. V rámci vzorového

příkladu je požadováno naplánovat množinu okružních jízd v síti, která je reprezentována grafem zachyceným v diagramu na obrázku č. 1.



Zdroj: Autor

Obr. 1 – Diagram grafu zachycující síť $N(V, E, l)$

V počátečním vrcholu je situováno depo. Kapacita obslužného vozidla je $K = 10$ jednotek. Ve vrcholech $j = 2, \dots, 8$ se nacházejí zákazníci, jejichž požadavky (celkem 24 jednotek) jsou uvedeny v tabulce č. 1.

Tab. 1 – Požadavky zákazníků pro vzorový příklad

j	2	3	4	5	6	7	8
b_j	3	6	5	1	2	3	4

Zdroj: Autor

2. POSTUP ŘEŠENÍ

Jak již bylo výše uvedeno, postup řešení vztahující se k metodě primárního trasování Route-First Cluster-Second spočívá ve dvou krocích. Tyto kroky budou nyní podrobně rozebrány a aplikovány na vzorový příklad.

2.1 Návrh trasy (Route-First)

V prvním kroku je cílem nalézt optimální trasu, která prochází všemi vrcholy právě jednou s výjimkou počátečního vrcholu (depa), začíná a končí v depu a má minimální délku. Kapacita obslužného vozidla je v tomto kroku zanedbána. Výchozí úlohou pro nalezení této optimální trasy je úloha o vyhledání minimální Hamiltonovy kružnice. S ohledem na velikost úlohy, pro kterou je tento krok řešení hledán, lze pro vyhledání minimální Hamiltonovy kružnice využít buď exaktní přístup (pro úlohy malého rozsahu) nebo heuristický přístup (pro úlohy velkého rozsahu). V rámci vzorového příkladu bude pro vyhledání Hamiltonovy kružnice představen exaktní přístup.

S ohledem na skutečnost, že minimální Hamiltonovu kružnici je možné vyhledat v grafech, které splňují podmínky existence Hamiltonovy kružnice, je nutné transformovat

výchozí graf reprezentovaný diagramem na obrázku č. 1 na úplný graf, ve kterém lze Hamiltonovu kružnici vyhledat. Tuto transformaci lze realizovat s pomocí vhodného algoritmu (např. Dijkstrův, Floyd-Warshallův aj.) (4). Výstupem z algoritmu je pak matice vzdáleností d_{ij} mezi vrcholy úplného grafu. Nyní je již možné představit matematický model pro vyhledání minimální Hamiltonovy kružnice (5):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m x_{ij} \cdot d_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m x_{ij} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, m \quad (2)$$

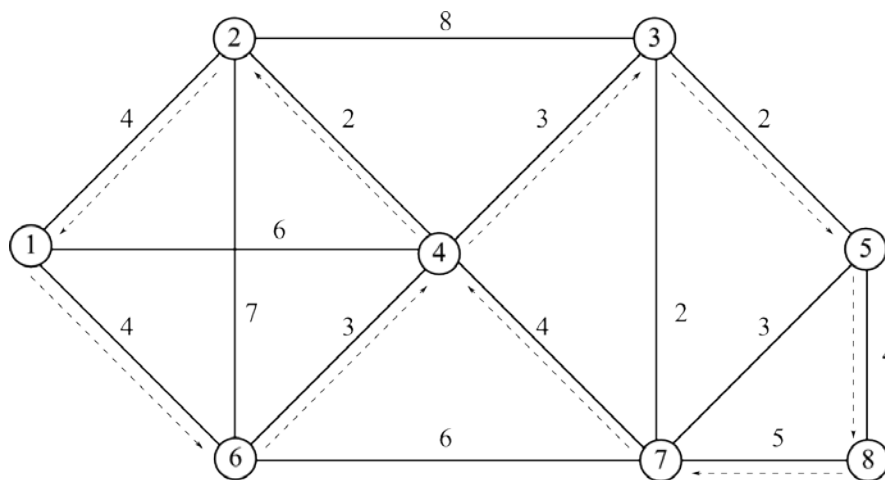
$$\sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^m x_{jk} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$y_j - y_i + m \cdot x_{ij} \leq m - 1, \text{ pro } i = 2, \dots, m, j = 2, \dots, m, i \neq j \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m, i \neq j \quad (5)$$

$$y_i \in \mathbb{R}_0^+, \text{ pro } i = 2, \dots, m \quad (6)$$

Veličina x_{ij} je bivalentní proměnná, která představuje zařazení resp. nezařazení hrany ij do trasy. Účelová funkce (1) představuje celkovou délku trasy. Podmínky (2) a (3) zajišťují, že do každého vrcholu vstoupí právě jedna hrana a z každého vrcholu právě jedna hrana vystoupí. Podmínky (4) zabraňují vzniku podcyklu. Podmínky (5) a (6) vymezují definiční obor proměnných x_{ij} a y_i . Pokud tento matematický model (1) – (6) aplikujeme na vzorový příklad, obdržíme řešení odpovídající posloupnosti vrcholů 1-6-3-5-8-7-4-2-1 s délkou 31 km. Toto řešení je zachyceno v diagramu na obrázku č. 2 a je vyznačeno čárkovanou čarou. Na tomto místě je vhodné poznamenat, že obrázek č. 2 zachycuje minimální Hamiltonovu kružnici již transformovanou zpět do reálné sítě. Z tohoto důvodu je



Zdroj: Autor

Obr. 2 – Diagram grafu zachycující síť $N(V, E, l)$ s vyznačením minimální Hamiltonovy kružnice

vrchol č. 4 navštíven opakovaně.

V této chvíli je možné přistoupit k dalšímu kroku řešení – dekompozici právě vyhledané trasy.

2.2 Tvorba shluků (Cluster-Second)

Ve druhém kroku řešení je pozornost navracena ke kapacitnímu omezení obslužného vozidla a s ohledem na tuto skutečnost jsou hledány jednotlivé okružní jízdy. Postup řešení směřující k vyhledání jednotlivých okružních jízd bude rozdělen do několika kroků.

2.2.1 Přechislování vrcholů

V první fázi je vhodné přechislovat vrcholy ve vyhledané trase tak, aby bylo možné jednoduše identifikovat depo a množinu zákazníků s jejich požadavky. Výchozí trasa bude mít obecně tvar $s, 1, \dots, m, s$, kde ve vrcholech $j = 1, \dots, m$ jsou situováni zákazníci s požadavky b_j . Vyhledaná trasa odpovídající posloupnosti vrcholů 1-6-3-5-8-7-4-2-1 tedy bude přechislována do podoby $s-1-2-3-4-5-6-7-s$. Pro tuto přechislovanou výchozí trasu je nyní nutné vypočítat matici vzdáleností d'_{ij} . K tomuto výpočtu bude použit opět vhodný algoritmus (např. Dijkstrův, Floyd-Warshallův, aj). Tabulka č. 2 názorněji ukazuje, jak budou označeny jednotlivé přechislované vrcholy.

Tab. 2 – Označení přechislovaných vrcholů

Nové označení vrcholů	1	2	3	4	5	6	7(m)	8(s)
Posloupnost vrcholů výchozí trasy	6	3	5	8	7	4	2(m)	1(s)

Zdroj: Autor

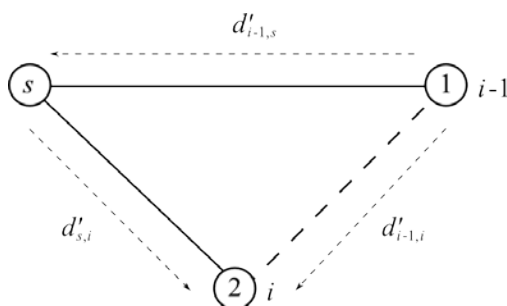
Vrcholům výchozí trasy jsou přiřazena pořadová čísla, která odpovídají jejich pořadí ve výchozí trase. Vrchol označený (m) je posledním vrcholem, ve kterém se nachází zákazník. Vrchol označený (s) pak označuje depo a je posledním a zároveň prvním vrcholem výchozí trasy.

2.2.2 Výpočet přírůstků

Vzhledem ke skutečnosti, že výchozí vyhledaná trasa bude po naplnění příslušné kapacity v určitém vrcholu $i-1$ přerušena a nová trasa bude pokračovat z následujícího vrcholu i , bude se délka výchozí trasy prodlužovat o přírůstek, který je dán vztahem (7)

$$p_i = d'_{i-1,s} + d'_{s,i} - d'_{i-1,i}, \text{ pro } i = 2, \dots, m \quad (7)$$

Přírůstek je vždy počítán pro dvojici sousedních vrcholů a těchto přírůstků je obecně $m-1$. Na obrázku č. 3. je zachycena teoretická situace, ilustrující výpočet přírůstku p_2 pro dvojici sousedních vrcholů 1-2, kdy je kapacita obslužného vozidla naplněna ve vrcholu č. 1. Výraz $d'_{i-1,s}$, zde konkrétně $d'_{1,s}$, odpovídá vzdálenosti, kterou musí vozidlo ujet pro návrat do depa s . Výraz $d'_{s,i}$, zde konkrétně $d'_{s,2}$, odpovídá vzdálenosti, kterou musí vozidlo ujet z depa s k následujícímu vrcholu, ze kterého pokračuje dále v trase. Výraz $d'_{i-1,i}$, zde konkrétně $d'_{1,2}$, odpovídá vzdálenosti, která je naopak uspořena.



Zdroj: Autor

Obr. 3 – Teoretická situace ilustrující výpočet přírůstku p_2 , pro dvojici sousedních vrcholů 1-2

2.2.3 Matematický model - dekompozice

Nyní je možné formulovat matematický model, jehož výstupem bude přiřazení zákazníků jednotlivým trasám tak, aby byl zabezpečen požadavek na nepřekročení kapacity obslužného vozidla a aby byl zároveň minimalizován součet přírůstků, které vznikají v důsledku dekompozice výchozí trasy (2).

$$\text{Min } \sum_{i=2}^m p_i \cdot z_{ij} \quad (8)$$

$$\sum_{j=i}^m b_j \cdot z_{ij} \leq K, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^j z_{ij} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, m \quad (10)$$

$$z_{i,j+1} \leq z_{ij}, \text{ pro } i = 1, \dots, m, j = i, \dots, m \quad (11)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, m, j = i, \dots, m \quad (12)$$

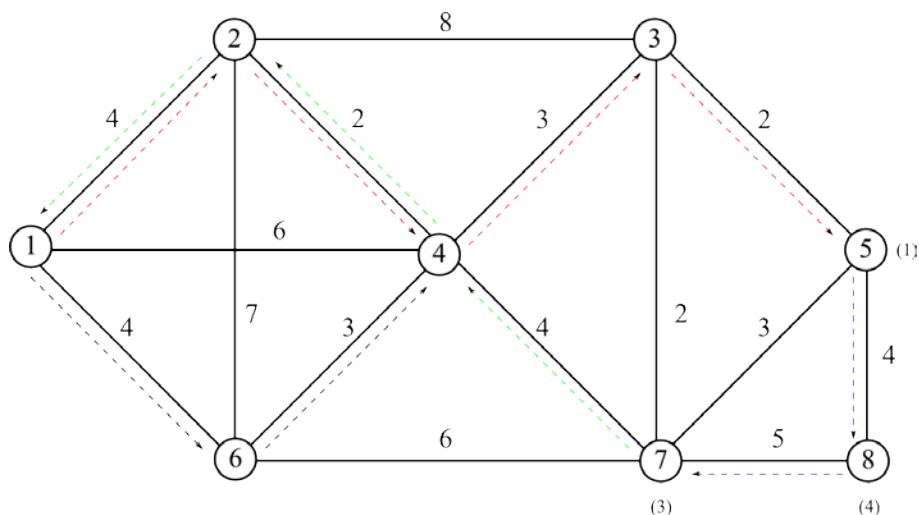
Účelová funkce (8) představuje celkový přírůstek, o který se zvětší délka výchozí trasy vlivem dekomponování této výchozí trasy na jednotlivé okružní jízdy zohledňující kapacitu obslužného vozidla. Proměnná z_{ij} je bivalentní proměnná, která modeluje přiřazení resp. nepř přiřazení zákazníka j do trasy začínající zákazníkem i . Podmínky (9) zajišťují, že součet požadavků zákazníků přiřazených ke konkrétní trase nepřekročí kapacitu obslužného vozidla. Podmínky (10) zajišťují, že každý zákazník j je přiřazen právě jedné trase se začátkem ve

vrcholu i . Podmínky (11) zajišťují souvislost jednotlivých tras vzhledem k výchozí trase. Podmínky (12) jsou podmínkami obligatorními a vymezují definiční obor proměnných z_{ij} .

Pokud tento matematický model (8) – (12) aplikujeme na vzorový příklad, výchozí trasa bude dekomponována na tři samostatné okružní jízdy A , B , C následujícím způsobem (malými čísly je označena vzdálenost mezi vrcholy):

- výchozí trasa: **1-4-6-6-3-2-5-4-8-5-7-4-4-2-2-4-1**, (délka 31 km, kapacita vozidla není zohledněna),
- okružní jízda A : **1-4-6-6-3-9-1**, (délka 10 km + 9 km návrat do depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 8 jednotek),
- okružní jízda B : **1-11-5-4-8-5-7-10-1**, (délka 9 km + 11 km nájezd z depa + 10 km návrat do depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 8 jednotek),
- okružní jízda C : **1-6-4-2-2-4-1**, (délka 6 km + 6 km nájezd z depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 8 jednotek).

Celková délka trojice okružních jízd činí 61 km. Výchozí trasa o délce 31 km byla prodloužena o nutné přejezdy z a do depa o délce 36 km (9 + 11 + 10 + 6), zároveň byly uspořeny přejezdy mezi vrcholy **3-2-5** a **7-4-4** o délce 6 km. Tedy $31 + 36 - 6 = 61$ km. Obrázek č. 4 zachycuje síť $N(V, E, l)$ s vyznačením okružní jízdy B . Červenou barvou je znázorněn nájezd vozidla z depa, modrou barvou je znázorněna část trasy, na které probíhá obsluha požadavků (celkem 8 jednotek). Zelenou barvou je pak znázorněn návrat vozidla zpět do depa.



Zdroj: Autor

Obr. 4 – Diagram grafu zachycující síť $N(V, E, l)$ s vyznačením okružní jízdy B

3. NUMERICKÉ EXPERIMENTY

S matematickým modelem (8) – (12), prezentovaným v tomto příspěvku, byly a jsou realizovány numerické experimenty, které ověřují možnosti využití tohoto přístupu v praxi. Konkrétně zde budou prezentovány výsledky experimentu na dopravní síti sestavené z významných míst obce Raškovice, ve kterých se nacházejí požadavky na obsluhu, celkem

100 jednotek. Reálná dopravní síť je tvořena 20 vrcholy, přičemž do 19 z nich byly pro účely experimentu umístěny fiktivní požadavky na obsluhu (celkem 100 jednotek). Tyto požadavky jsou shrnuty v tabulce č. 4.

Tab. 4 – Požadavky zákazníků pro obec Raškovice

j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_j	6	4	8	5	9	7	3	5	8	6	3	2	7	4	2	5	9	3	4

Zdroj: Autor

Kapacita obslužného vozidla je nastavena na $K = 30$ jednotek. Cílem je naplánovat množinu okružních jízd začínajících a končících v depu s tak, aby celková vzdálenost potřebná pro obsluhu zákazníků byla minimální a aby nebyla překročena kapacita vozidla.

S využitím matematického modelu (1) – (6) byla v prvním kroku řešení (Route-First) vyhledána minimální Hamiltonova kružnice s délkou 39,22 km při současném zanedbání kapacity obslužného vozidla. Následně, ve druhém kroku (Cluster-Second), byly po přípravných operacích vyhledány čtyři okružní jízdy D , E , F , G při současném zohlednění kapacity obslužného vozidla. Tyto okružní jízdy budou nyní popsány a porovnány s výchozí trasou (malými čísly je opět označena vzdálenost mezi vrcholy):

- výchozí trasa: **1-13-15-1,3-8-0,75-6-1,1-4-0,3-2-0,9-3-1,2-5-1,5-7-1,4-10-0,5-9-0,65-11-0,6-12-0,35-13-0,8-14-0,4-18-0,29-17-0,19-20-0,37-19-0,37-16-13,25-1**, (délka 39,22 km, kapacita vozidla není zohledněna),
- okružní jízda D : **1-13-15-1,3-8-0,75-6-1,1-4-13,7-1**, (délka 16,15 km + 13,7 km návrat do depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 23 jednotek),
- okružní jízda E : **1-13,4-2-0,9-3-1,2-5-1,5-7-16,34-1**, (délka 3,6 km + 13,4 km nájezd z depa + 16,34 km návrat do depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 24 jednotek),
- okružní jízda F : **1-14,94-10-0,5-9-0,65-11-0,6-12-0,35-13-0,8-14-13,75-1**, (délka 2,9 km + 14,94 km nájezd z depa + 13,75 km návrat do depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 30 jednotek),
- okružní jízda G : **1-13,35-18-0,29-17-0,19-20-0,37-19-0,37-16-13,25-1**, (délka 14,47 km + 13,35 km nájezd z depa, obsloužen požadavek zákazníků o velikosti 23 jednotek).

Celková délka čtveřice okružních jízd činí 122,6 km. Výchozí trasa o délce 39,22 km byla prodloužena o nutné přejezdy z a do depa o délce 85,48 km (13,7 + 13,4 + 16,34 + 14,94 + 13,75 + 13,35), zároveň byly uspořeny přejezdy mezi vrcholy **4-0,3-2**, **7-1,4-10**, a **14-0,4-18** o délce 2,1 km. Tedy 39,22 + 85,48 - 2,1 = 122,6 km.

ZÁVĚR

Předložený příspěvek byl věnován problematice dekompozice okružních jízd s využitím matematického programování. V textu příspěvku byla pozornost věnována tzv. Route-First Cluster-Second přístupu s využitím matematického programování. V příspěvku byly

prezentovány dva matematické modely, které lze využít pro řešení jednotlivých kroků dekompozičního přístupu. Kromě vzorového příkladu, na kterém byl celý postup detailně ilustrován, byl uveden jeden z výpočetních experimentů realizovaný na reálné dopravní síti v obci Raškovice. Všechny výpočetní experimenty s matematickými modely (1) – (6) a (8) – (12) byly realizovány ve výpočetním prostředí *Xpress-Ive* (6). Přípravné výpočty vztažené k získání potřebných matic vzdáleností mezi jednotlivými vrcholy sítě byly realizovány v prostředí *Wolfram Mathematica* (7).

Příspěvek byl vytvořen v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost – Projekt č. CZ.1.07/2.3.00/20.0296 a Programu na podporu aplikovaného výzkumu a experimentálního vývoje EPSILON, Technologické agentury České republiky: „Efektivní přístupy k úsporným a adaptabilním systémům údržby a obsluhy dopravních sítí“ TH02010930.

POUŽITÁ LITERATURA

- (1) COOK, W., J. *Po stopách obchodního cestujícího*. Praha: Argo, 2012. 255 s. ISBN 978-80-257-0706-7.
- (2) JANÁČEK, J. *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina: Edis, 2002. 248 s. ISBN 80-8070-031-1.
- (3) POMP, M., KOZEL, P., MICHALCOVÁ, Š., ORLÍKOVÁ, L. Using the Sweep Algorithm for decomposing a set of vertices and subsequent solution of the traveling salesman problem decomposed subsets In *Proceedings of 35th International Conference Mathematical Methods in Economics 2017*. Hradec Kralove: University of Hradec Kralove. Faculty of Informatics and Management, 2017.
- (4) SKIENA, S., PEMMARAJU, S. *Computational Discrete Mathematics*. New York: Cambridge University Press, 2003. 480 s. ISBN 0-521-80686-0.
- (5) JANÁČEK, J. *Matematické programování*. Žilina: Edis, 2003. 225 s. ISBN 80-8070-054-0.
- (6) *XPRESS-Mosel „User Guide“*. Blisworth: Dash Associates, United Kingdom, 2005.
- (7) FRIEDRICH, V. *Matematika na počítači pro nematematiky*. Ostrava: Vydavatelství VŠB-TU Ostrava, 2013. 268 s. ISBN 978-80-248-3162-6.