

HLEDÁNÍ ROVNOVÁŽNÉ POLOHY MECHANISMŮ

FINDING OF STATIC EQUILIBRIUM OF MECHANISMS

Lubor Zháňal¹

Anotace: Hledání rovnovážné polohy mechanismů složených z mnoha částí je složité, ale velmi užitečná oblast kinematické analýzy. Tento článek pojednává o problematice hledání rovnovážné polohy prostřednictvím numerické počítačové simulace.

Klíčová slova: multibody, statická rovnováha, mechanismy, simulace

Summary: Finding of static equilibrium position of mechanism assembled from many parts is difficult but very useful part of kinematic analysis. This article discusses the problems of finding static equilibrium using numerical methods in computer simulation environment.

Key words: multibody, static equilibrium, mechanisms, simulation

ÚVOD

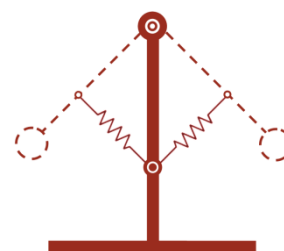
Mějme obecný rovinný či prostorový mechanismus, který se sestává z tuhých těles, kinematických vazeb, případně z dalších interakčních silových prvků (např. pružina, tlumič, atd.), a který je zatížen vnějším silovým působením. Pak pod rovnovážnou polohou rozumíme takový stav mechanismu, v kterém tento může setrvat po neomezenou dobu, aniž by měl tendenci začít se pohybovat.



Obr. 1



Obr. 2



Zdroj: Autor

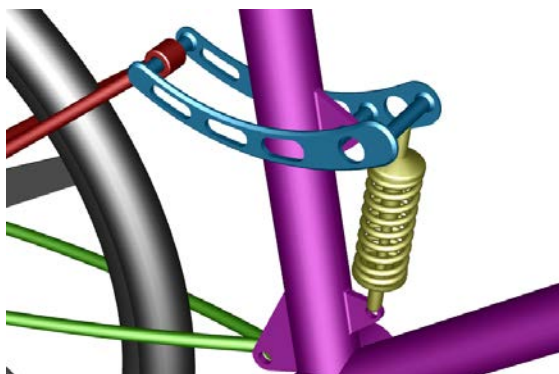
Obr. 3

Typickým příkladem takové rovnovážné polohy je například kyvadlo v dolní úvrti (Obr. 1), na které působí pouze gravitační zrychlení. Naproti tomu existují i mechanismy, které rovnovážné polohy dosáhnout nemohou, jako třeba rotující disk zatížený momentem síly (Obr. 2), nebo i takové mechanismy, které mají více stabilních poloh, jako například bistabilní kyvadlo s pružinou (Obr. 3).

¹ Ing. Lubor Zháňal, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automobilního a dopravního inženýrství, Technická 2896/2, 61669 Brno, Tel.: +42054114 2264, E-mail: zhanal@fme.vutbr.cz

1. POUŽITÁ NUMERICKÁ METODA

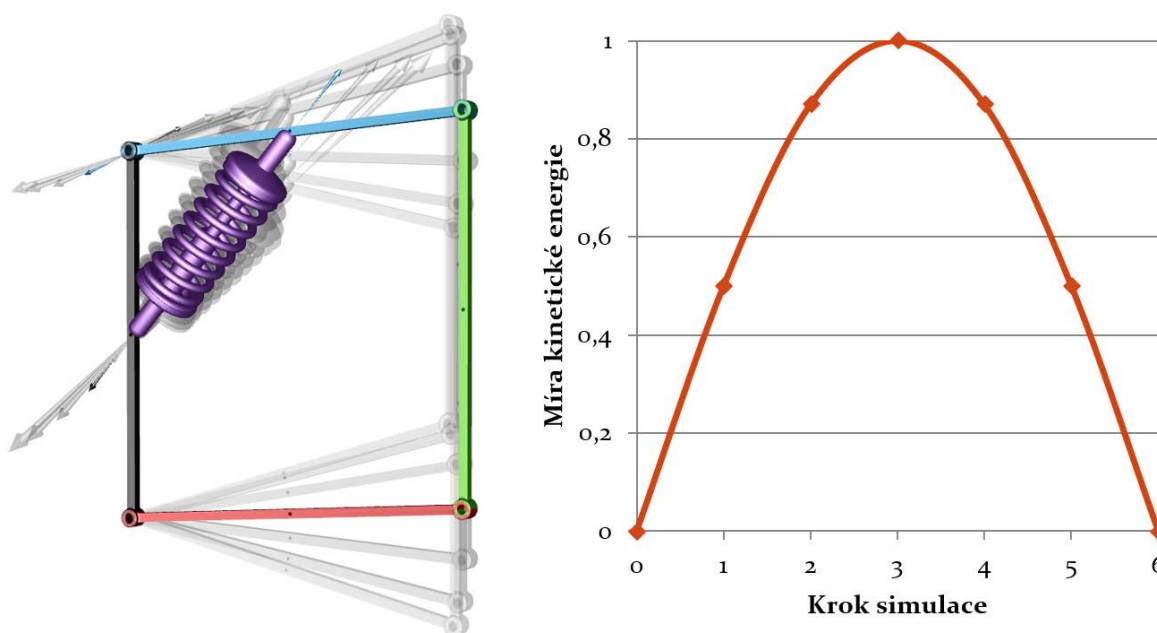
Pohyb mechanické soustavy těles můžeme řešit různými způsoby (1), (2). U jednoduchých “školních” příkladů si obvykle vystačíme s analytickým řešením, u složitějších však musíme v praxi sáhnout k numerické simulaci prostřednictvím programů, které se označují jako multi-body systémy (Obr. 4). A právě pro tento typ programů byla navržena metoda na snadné nalezení rovnovážné polohy simulovaných mechanismů.



Zdroj: Autor

Obr. 4 – Ukázka mechanismu simulovaného v multibody systému

Princip samotné metody je poměrně jednoduchý. Představme si graf, na jehož ose X je čas pohybu mechanismu a na osu Y budeme vynášet okamžitou hodnotu celkové kinetické energie mechanismu. Metoda nalezení globální rovnovážné polohy, kterou se bude zabývat tento článek, vychází z předpokladu, že tato hledaná poloha leží v nebo poblíž jednoho z lokálních maxim na grafu průběhu kinetické energie (Obr. 5).



Zdroj: Autor

Obr. 5 – Znázornění pohybu mechanismu s průběhem jeho kinetické energie

Provádíme-li simulaci takového mechanismu v multi-body systému, pak hledání rovnovážné polohy spočívá v tom, že v každém iteračním kroku se spočte celková kinetická energie (nebo ekvivalentní zástupná charakteristika, viz odstavec o vylepšení algoritmu), čímž dostáváme její průběh v čase. Jakmile detekujeme v tomto průběhu lokální minimum, pak odebereme tělesům mechanismu jistou část kinetické energie, čímž utlumíme jejich pohyb. Pokud takto budeme pokračovat opakovaně, simulace bude zaručeně konvergovat do stavu rovnovážné polohy mechanismu.

2. PROVEDENÁ VYLEPŠENÍ METODY

Během implementace výše popsaného principu se ukázalo, že je v něm ještě prostor pro zlepšení jak z hlediska programové optimalizace, tak i rychlosti konvergence. Na základě testování tedy byly provedeny následující úspěšné úpravy.

2.1 Zjednodušení výpočtu kinetické energie

Tato úprava vychází ze skutečnosti, že v průběhu simulace hledání rovnovážné polohy není zapotřebí znát přesné hodnoty celkové kinetické energie soustavy těles, jak popisuje rovnice (1), ale postačí taková zjednodušená charakteristika, která nabízí ekvivalentní průběh s rozmístěním lokálních extrémů.

$$K_e = \sum \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \right) \quad (1)$$

Z původní rovnice (1) tedy můžeme odstranit všechny konstanty, které nemají vliv na topologii extrémů v průběhu funkce. Po zjednodušení pak dostáváme tvar rovnice (2), jehož výpočet je méně náročný, což se pozitivně odráží v rychlosti celé simulace.

$$K_{ee} = \sum (v^2 + \omega^2) \quad (2)$$

2.2 Volba koeficientu utlumení

Na počátku byla myšlenka, že nejvýhodnější bude ihned po detekci lokálního extrému odebrat všem tělesům mechanismu veškerou kinetickou energii, tj. vynulovat vektory translační (v) a úhlové rychlosti (ω), což by mělo vést k nejrychlejšímu nalezení rovnovážné polohy.

$$\begin{aligned} \forall \rightarrow v^i &= \vec{0} \\ \forall \rightarrow \omega^i &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3)$$

V praxi se však ukázalo, že u složitějších mechanismů je obvykle nalezení globální rovnovážné polohy provázeno průchodem mechanismu přes mnoho lokálních extrémů v průběhu charakteristiky K_{ee} . Tím se prodlužuje doba, za kterou mechanismus dospěje ve svém pohybu do blízkosti rovnovážné pozice, neboť po každém průběžném zastavení mechanismu se musí opět rozbíhat. Jako výhodnější se ukázalo odebírat v klíčové okamžiky jen část

kinetické energie, tj. vynásobit oba vektory translační a úhlové rychlosti koeficientem utlumení ($k_t < 1$).

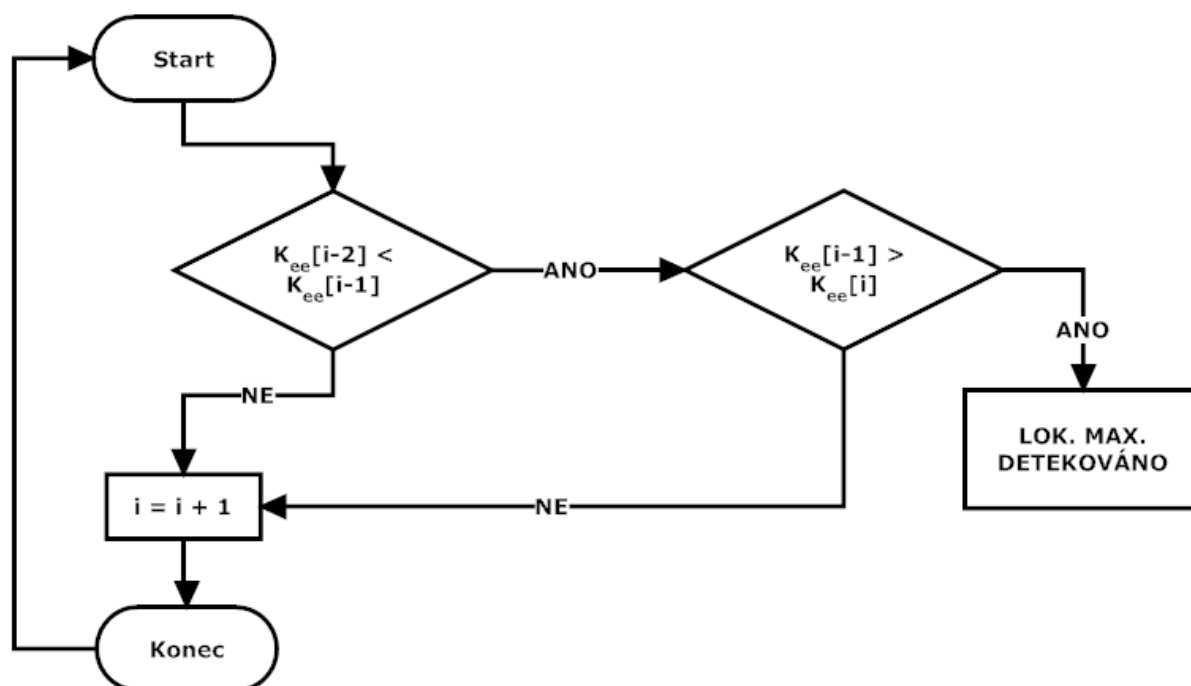
$$\begin{aligned}\forall \rightarrow \vec{v}^i &= k_t \cdot \vec{v}^i \\ \forall \rightarrow \vec{\omega}^i &= k_t \cdot \vec{\omega}^i\end{aligned}\quad (4)$$

Tím se sice prodlouží finální doba dokmitávání kolem rovnovážné polohy, ale její hrubé nalezení je výrazně rychlejší, což je v součtu ku prospěchu věci.

2.3 Detekce lokálního extrému

Jelikož simulace mechanismu probíhá numerickým řešením v počítačovém programu, tak nepracujeme se spojitými průběhy, ale se sérií diskretních hodnot v jednotlivých iteracích (i), neboli krocích simulace. Tomu musíme uzpůsobit i algoritmus detekce lokálního maxima.

Základní idea spočívá v porovnávání tří posledních po sobě jdoucích vzorků kinetické energie K_{ee} s tím, že jakmile je prostřední vzorek nejvyšší, pak jsme v předcházejícím kroku simulace byli v lokálním maximu sledovaného průběhu.



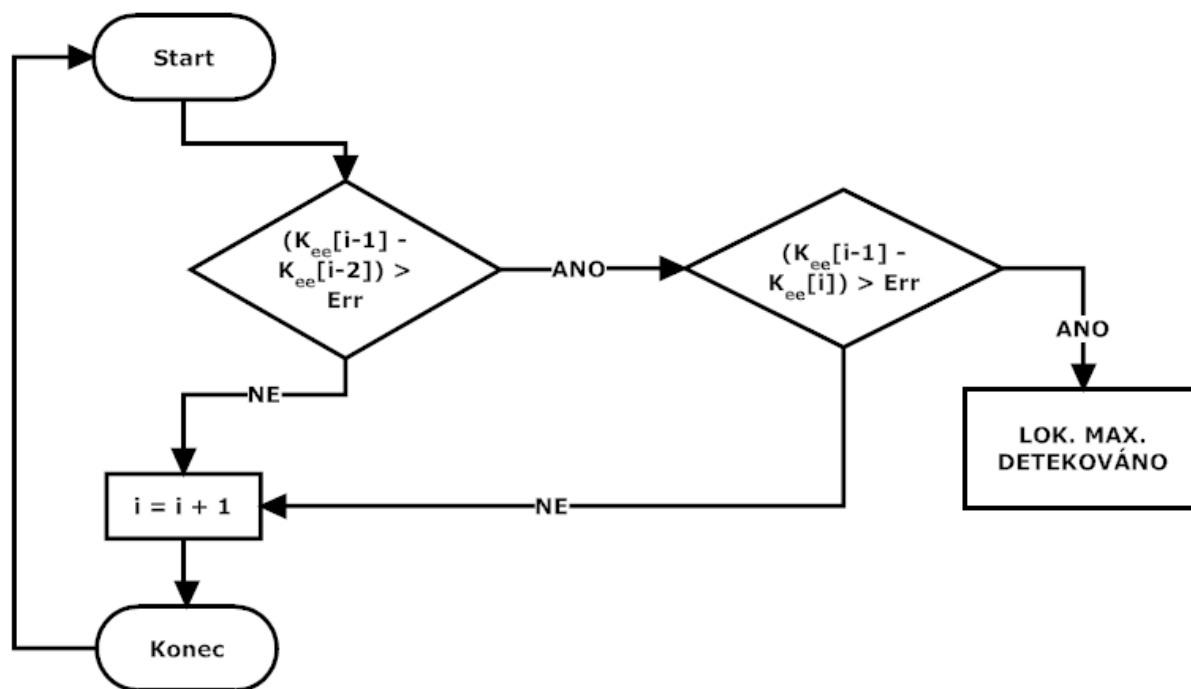
Zdroj: Autor

Obr. 6 – Detekce lokálního maxima

Fakt, že jsme lokální maximum detekovali až v následujícím kroku není příliš podstatný, neboť rozdíl poloh mechanismu je obvykle díky velikosti diskretizačního kroku velmi malý a celé řešení tak jako tak dokonverguje. Problém ovšem může nastat ve chvíli, kdy se dostaneme se simulací do takové části analyzované křivky, která je po delší dobu plochá. V tom případě může být kvůli numerickým chybám mylně detekováno lokální

maximum, které vyvolá proces utlumení, jenž může vést ve zmatení ukončovacích kritérií a předčasnému přerušení simulace s nesprávně nalezenou rovnovážnou polohou.

Jednou z možností řešení toho problému je upravit algoritmus detekce lokálního extrému tak, aby bral v úvahu jen odchylky větší, než je nějaká vůči numerickým chybám bezpečná minimální hodnota (*Err*).



Zdroj: Autor

Obr. 7 – Upravená detekce lokálního maxima

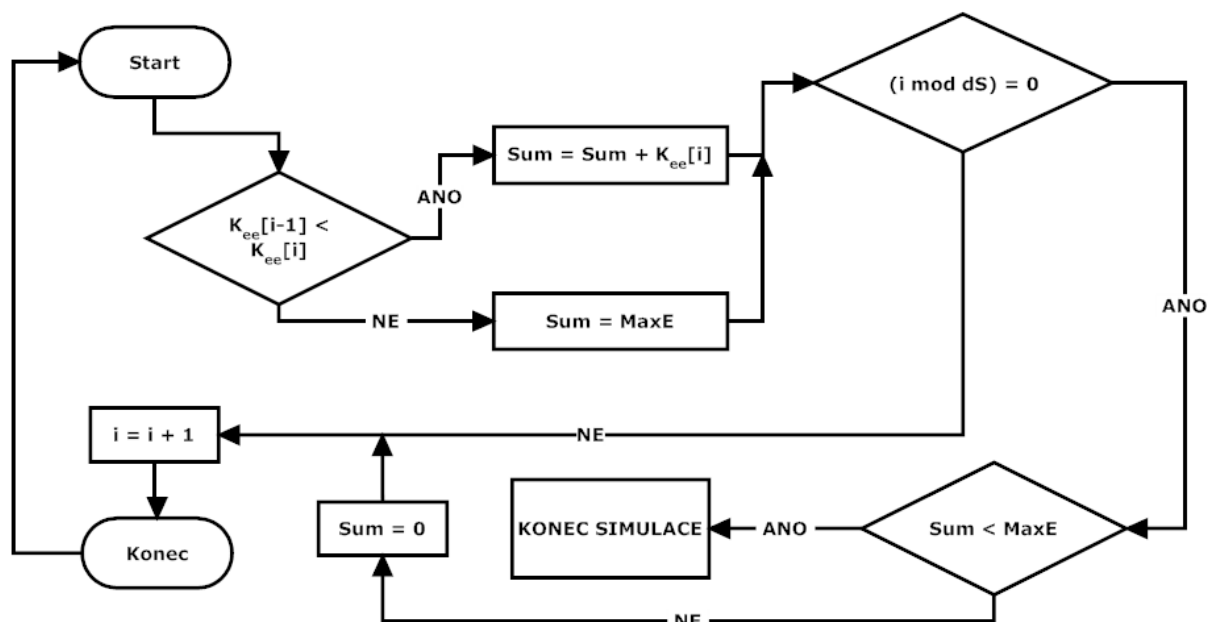
3. KRITÉRIA UKONČENÍ

Předchozí odstavce popisovaly způsob, kterým můžeme poměrně snadno a z výpočetního hlediska nenáročně upravit simulaci mechanismu tak, aby konvergovala k rovnovážné poloze. Nicméně zbývá ještě poslední krok a tím je ukončení simulace ve chvíli, kdy se mechanismus v této pozici skutečně nalézá. Protože však pracujeme s diskretizovaným numerickým řešením, tak to není zcela triviální záležitost. Následuje několik prvotních nápadů na kritérium pro ukončení simulace spolu s popisem jejich nedostatků.

- *Dosažení nulové rychlosti všech těles:* vzhledem k numerické povaze řešení prakticky nerealizovatelné kritérium
- *Pokles celkové kinetické energie pod určitou mez:* funguje dobře u vybraných mechanismů, ovšem problém nastává u soustav, jejichž pohyb začíná z astabilního stavu

Z mnoha pokusů nakonec vyplynula taková podoba kritéria, které poměrně spolehlivě dokáže určit okamžik příhodný pro ukončení simulace a prohlášení stavu mechanismu za rovnovážný. Toto kritérium je založeno na principu dlouhodobějšího sledování (v kontextu simulace) průběhu charakteristiky K_{ee} . Pokud průběh této veličiny klesá a suma (*Sum*) za

určitý počet simulačních kroků (dS) nepřesáhne nastavenou mez ($MaxE$), dojde k ukončení simulace.



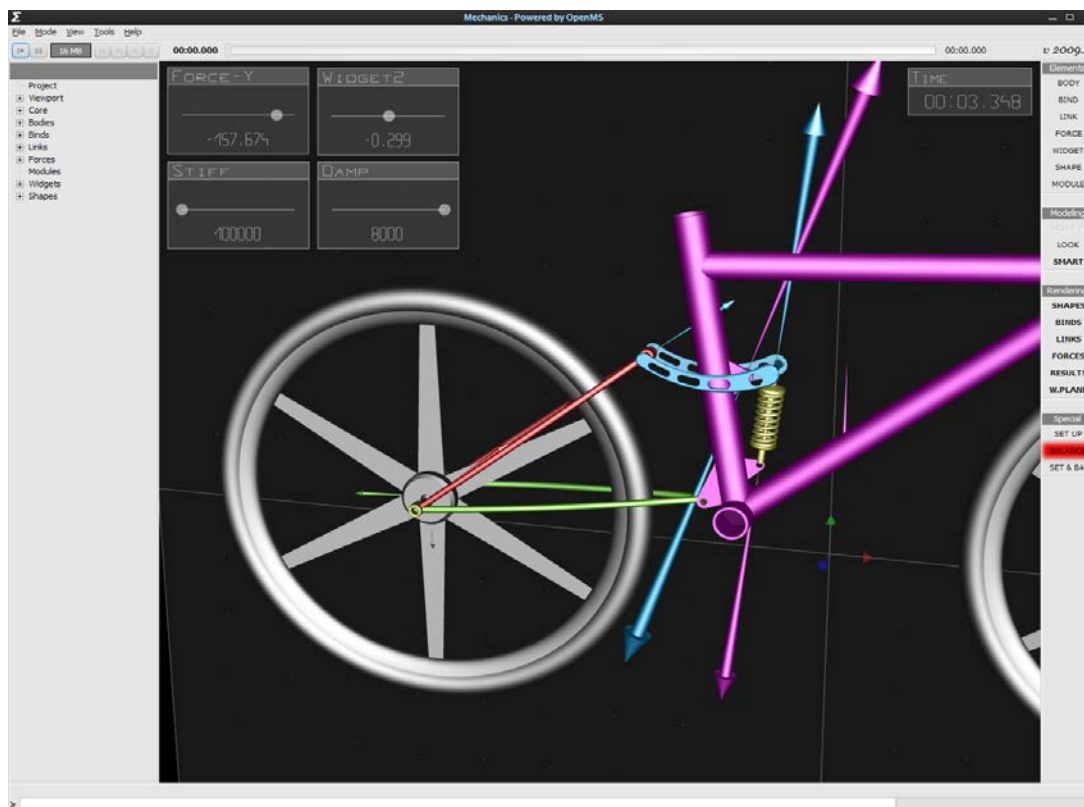
Zdroj: Autor

Obr. 8 – Kritérium ukončení

Takto postavené kritérium odolává do značné míry i problémům s astabilní výchozí polohou nebo děletrvající plochosti v průběhu charakteristiky K_{ee} . Pro případy, kdy je tvrdost kritéria příliš vysoká a simulace hledání rovnovážné polohy dlouhá, má uživatel stále k dispozici možnost manuálního ukončení simulace v aktuálním okamžiku konvergujícího řešení.

ZÁVĚR

Uvedená metoda hledání globální rovnovážné polohy byla úspěšně implementována v experimentálním multi-body systému Mechanics, (Obr. 9). Po stránce programátorské se jedná o velmi jednoduchý a výpočetně nenáročný způsob, který však spolehlivě zajišťuje konvergenci řešení v poměrně krátkém čase.



Zdroj: Autor

Obr. 9 - Prostředí multi-body systému Mechanics (červeně je zvýrazněno tlačítko pro spuštění hledání rovnovážné polohy)

Celý systém pracuje tím lépe, čím vzdálenější je z energetického hlediska výchozí poloha od polohy rovnovážné (např. různé předpružené mechanismy), nebo čím rychleji se daný mechanismus může samovolně pohybovat.

Samozřejmě ani úspěšně nalezená rovnovážná poloha nemusí být (a zpravidla ani není) zcela přesná, ať už vlivem numerických nepřesností, nebo nedokonalým zásahem ukončovacího kritéria. Nicméně tato přesnost závisí zejména na vhodné volbě koeficientů kritéria ($MaxE$, dS) a je tedy ovlivnitelná, stejně jako rychlost konvergence, která závisí na koeficientu tlumení (k_t).

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum byl podpořen Evropskou unií a Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy, projektem NETME Centre – Centrum nových technologií pro strojírenství, reg. č. CZ.1.05/2.1.00/01.0002.

POUŽITÁ LITERATURA

- (1) PORTEŠ, P. Matematické modelování ovladatelnosti vozidel. Brno: VUT Brno, 1998
- (2) KREITH, F. The CRC Handbook of Mechanical Engineering. 1. vyd. 1998. ISBN 978-0849394188.