# ÚLOHA OKRUŽNÍCH JÍZD S ČASOVÝMI OKNY

# VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS

Petr Kozel[1]

*Anotace: Předložený příspěvek se zabývá řešením problematiky plánování okružních jízd pro dopravní park vozidel, za předpokladu, že kromě požadavku si zákazník také definuje časový interval, ve kterém je možné provést jeho obsluhu. V příspěvku je představen matematický model publikovaný prof. RNDr. Jaroslavem Janáčkem, CSc., na základě kterého je možné k řešení této problematiky přistupovat. V závěru článku je prezentován výpočetní experiment, který byl s tímto modelem proveden.*

*Klíčová slova: dopravní úloha, okružní jízda, časová okna.*

*Summary: This paper is focus on solve the  Vehicle Routing Problem with Time Windows. The each customer determine the number of requirements and the time of visit of vehicle in this contribution. The mathematical model for solve this problem was published by prof. RNDr. Jaroslav Janacek, CSc. and there is used in this contribution. The real problem of distribution of beer was solving through this mathematical model.*

*Key words: transportation problem, vehicle routing problem, time windows.*

## ÚVOD

Určování denních tras dopravních prostředků je každodenní náplní práce dispečerů zabezpečujících obsluhu zákazníků, v rámci distribuce zboží. K určování denních tras jednotlivých vozidel, které samotnou obsluhu zákazníka vykonávají, je možné využít metody založené na lineárním programování. Jednou z úloh této problematiky, patřících do kategorie lineárního programování je úloha okružních jízd, známá jako CVRP (Capacited Vehicle Routing Problem).

Matematický model sestavený na základě této úlohy slouží k řešení návrhu okružních jízd pro jednotlivá vozidla dopravního parku s cílem minimalizovat celkovou ujetou vzdálenost všech vozidel nasazených na jednotlivé trasy. Tato úloha se však nezabývá časem navštívení zákazníka. V praxi se však můžeme setkat s řadou problémů, kde čas navštívení zákazníka hraje významnou roli. Jedná se o situaci, kdy zákazník požaduje obsloužení v předem stanoveném časovém intervalu. Např. rozvoz pečiva, rozvoz piva. Prodejny prodávající výše uvedené zboží mají často rozdílné otevírací doby, z čehož plyne, že čas zásobování je vázán na otevírací dobu jednotlivých prodejen. Některé prodejny mají dokonce s ohledem na vytížení pracovních sil přímo stanoveny časové intervaly, ve kterých si přejí být zásobovány, což může být u jednotlivých prodejen různé.

[1] Ing. Petr Kozel, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. Listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava Poruba, Tel.: +420739002714, E-mail: kozelp@seznam.cz

Tato situace tedy vyvolává požadavek zahrnout do úlohy okružních jízd podmínku na navštívení zákazníka v předem stanoveném časovém intervalu. Matematický model, který tento požadavek zahrnuje, byl publikován v (1), (2). Tato úloha je často označována jako úloha okružních jízd s časovými okny VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows), (3).

## 1. FORMULACE PROBLÉMU

Je definována dopravní síť $D = J \cup \{S\}$, která je tvořena množinou uzlů *J*, ve kterých se nacházejí zákazníci *J*, a uzlem *S*, ve kterém se nachází sklad. Každý zákazník $j \in J$ požaduje $b_j$ jednotek zboží a zároveň je pro každého zákazníka definován interval $\langle d_j, h_j \rangle$, ve kterém požaduje, aby byla zahájena jeho obsluha. Předpokládáme, že kapacita skladu *S* je větší, než součet požadavků všech zákazníků. Dále máme k dispozici množinu vozidel *R*, která se nachází v uzlu, ve kterém je umístěn i sklad *S*. Pro každé vozidlo $r \in R$ je definována kapacita $K_r$. Každé z vozidel může být v daný den použito nejvýše jednou. Pro každou dvojici uzlů *i, j* z *D* je známa vzdálenost $d_{i,j}$ a kladná doba přesunu $t_{i,j}$ mezi dotčenými uzly *i, j*. V době přesunu $t_{i,j}$ je zahrnuta i doba, která je potřebná k obsloužení daného uzlu.

Úkolem je navrhnout pro množinu vozidel *R* množinu okružních jízd tak, aby jejich celková délka byla minimální, za předpokladu splnění požadavku na nepřekročení kapacity žádného z vozidel $r \in R$. Dále musí být splněno, že každý zákazník $j \in J$ bude obsloužen jedinou návštěvou vozidla v zadaném „časovém okně“.

## 2. MATEMATICKÝ MODEL ÚLOHY OKRUŽNÍCH JÍZD S ČASOVÝMI OKNY

Do matematického modelu vstupují konstanty a proměnné, které modelují jednotlivá rozhodnutí o trase vozidla. Konstantní veličiny byly definovány ve stati formulace problému. Proměnné vstupující do modelu jsou dvojího druhu. Bivalentní proměnné $x_{ijr} \in \{0,1\}$ pro $i, j \in D$, $i \neq j$, $r \in R$ modelují přiřazení, resp. nepřiřazení *r*-tého vozidla na trasu mezi uzly *i, j*. Pokud:

$x_{ijr} = 1$, dojde k přiřazení *r*-tého vozidla na trasu *i, j,*

$x_{ijr} = 0$, nedojde k přiřazení *r*-tého vozidla na trasu *i, j.*

Další skupinou proměnných jsou nezáporné proměnné $t_j^r$, pro $r \in R$, $j \in J$, které modelují čas, ve kterém započne obsluha uzlu *j*, vozidlem *r*, za předpokladu, že bude vozidlo *r*, zákazníka *j* obsluhovat.

Matematický model úlohy má následující tvar:

$$\min \quad \sum_{r\in R}\sum_{i\in D}\sum_{\substack{j\in D\\ i\neq j}} d_{ij}\cdot x_{ijr} \qquad (1)$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{\substack{i\in D\\ i\neq j}} x_{ijr} = 1 \qquad \text{pro } j\in J \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} x_{Sjr} \le 1 \qquad \text{pro } r\in R \qquad (3)$$

$$\sum_{\substack{i\in D\\ i\neq j}} x_{ijr} = \sum_{\substack{i\in D\\ i\neq j}} x_{jir} \qquad \text{pro } j\in D,\ r\in R \qquad (4)$$

$$\sum_{j\in J} b_j \sum_{\substack{i\in D\\ i\neq j}} x_{ijr} \le K_r \qquad \text{pro } r\in R \qquad (5)$$

$$t_i^r + t_{ij} \le t_j^r + t_{\max}\left(1-x_{ijr}\right) \qquad \text{pro } r\in R,\ i\in J,\ j\in J, i\neq j \qquad (6)$$

$$t_j^r \le h_j \qquad \text{pro } r\in R,\ j\in J \qquad (7)$$

$$t_j^r \ge d_j \qquad \text{pro } r\in R,\ j\in J \qquad (8)$$

$$x_{ijr} \in \{0,1\} \qquad \text{pro } r\in R,\ i\in D,\ j\in D, i\neq j \qquad (9)$$

Výraz (1) reprezentuje účelovou funkci. Podmínky (2) zabezpečují, že každý zákazník bude navštíven právě jednou, právě jedním vozidlem. Podmínky (3) zabezpečují, že každé vozidlo bude použito nejvýše jednou, podmínky (4) pak zabezpečí, že každé vozidlo, které do uzlu vjede, z něj poté vyjede. Podmínky (5) zabezpečí, že součet požadavků, které budou obsluhovány *r*-tým vozidlem nepřekročí jeho kapacitu. Podmínky (6) zabezpečují, že pokud pojede vozidlo *r* z uzlu *i* do uzlu *j*, bude mezi časem začátku obsluhy zákazníka *i* $t_i^r$ a časem začátku obsluhy zákazníka *j* $t_j^r$ dostatečně dlouhá doba potřebná k dokončení obsluhy zákazníka *i* a k přejezdu k zákazníku *j*. Tato doba je označena $t_{\max}$ a její hodnota je větší, než součet času obsluhy a doby následujícího přejezdu mezi kterýmikoliv uzly *i, j*.

## 3. VÝPOČETNÍ EXPERIMENTY

Výše uvedený matematický model byl použit pro řešení návrhu tras obslužných vozidel pro rozvozu nápojů, pro skupinu spotřebních družstev Jednota spadajících do obvodu Frýdek-Místek. Výpočetní experimenty s tímto modelem byly provedeny v optimalizačním software Xpress-IVE, čas výpočtu byl nad hranicí 5000 sekund a nepodařilo se s dostupným množstvím operační paměti prohledat celou množinu přípustných řešení a nalézt řešení optimální. Přesto bylo nalezeno 21 přípustných řešení. Výsledek nejlepšího z těchto přípustných řešení je zde prezentován.

Do skupiny *J* spotřebních družstev Jednota, spadajících do obvodu Frýdek-Místek, patří 27 prodejen, které jsou zásobovány nápoji, resp. pivem, z jednoho skladu *S*, který se nachází v prostorách pivovaru v obci Nošovice. Ve stejném místě se také nachází vozový park *R*, pro který budou obslužné trasy navrhovány. Pro všechny vozidla jsou definovány jejich kapacity $K_r$, které nesmí být překročeny. Dopravní síť $D$ je tedy tvořena množinou prodejen požadujících obsluhu $J$ a místem představující sklad $S$. Pro každou dvojici míst $i, j;\ i \neq j$ dopravní sítě je definována vzdálenost $d_{i,j}$ a doba $t_{i,j}$ potřebná pro přemístění mezi místy $i$ a $j$ a obsluhu místa $j$. Každá prodejna požaduje dodávku nápojů $b_j$, která je udána v počtu přepravek. Zároveň si každá prodejna definuje časový interval $\langle d_j, h_j \rangle$, ve kterém požaduje navštívení a obsluhu. Tento časový interval ve formátu $\langle hh:mm; hh:mm \rangle$ je před procesem optimalizace pro potřeby výpočtu přepočten na minuty. Výchozí situace je zobrazena na obrázku č. 1. Údaje vstupující do matematického modelu jsou uvedeny v tabulkách č. 1., č. 2. Tabulky obsahující matice vzdáleností a matice časové dostupnosti nejsou s ohledem na rozsah článku uvedeny.


Zdroj: Autor

Obr. 1 – Orientační schéma řešené oblasti – polohy prodejen Jednota

Tab. 1 – Kapacity vozidel

| Vozidlo | Kapacita $[přepravka]$ |
|---|---|
| Vozidlo č. 1 | 100 |
| Vozidlo č. 2 | 80 |
| Vozidlo č. 3 | 80 |
| Vozidlo č. 4 | 150 |
| Vozidlo č. 5 | 80 |
| Vozidlo č. 6 | 80 |

Zdroj: Autor

Tab. 2 – Seznam prodejen a jejich požadavků na dodávku zboží a čas započetí obsluhy

| Číslo | Obec | Požadavek $[přepravka]$ | Čas návštěvy $[hh:mm]$ | | Číslo | Obec | Požadavek $[přepravka]$ | Čas návštěvy $[hh:mm]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Frýdek-Místek, 150 | 50 | 5:30 | 10:00 | 15 | Hukvaldy | 9 | 8:00 | 10:00 |
| 2 | Bludovice | 15 | 7:00 | 12:00 | 16 | Soběšovice | 8 | 7:00 | 12:00 |
| 3 | Čeladná, 460 | 8 | 7:00 | 15:00 | 17 | Staré Hamry | 6 | 6:00 | 13:00 |
| 4 | Čeladná, 715 | 6 | 6:30 | 15:00 | 18 | Frýdek-Místek, 1101 | 60 | 5:00 | 10:00 |
| 5 | Dobrá | 12 | 6:00 | 15:00 | 19 | Vyšní Lhoty | 20 | 15:00 | 20:00 |
| 6 | Dolní Domaslavice | 14 | 8:00 | 12:00 | 20 | Baška | 16 | 10:00 | 12:00 |
| 7 | Hnojník, 125 | 10 | 13:00 | 16:00 | 21 | Hnojník, 336 | 9 | 7:00 | 15:00 |
| 8 | Chlebovice | 20 | 8:00 | 17:00 | 22 | Kozlovice | 6 | 8:00 | 12:00 |
| 9 | Morávka | 25 | 10:00 | 16:00 | 23 | Ostravice, 72 | 15 | 7:00 | 12:00 |
| 10 | Oldřichovice | 25 | 9:00 | 12:00 | 24 | Raškovice, 401 | 35 | 6:30 | 11:00 |
| 11 | Ostravice, 581 | 19 | 7:00 | 13:00 | 25 | Návsí | 30 | 8:00 | 12:00 |
| 12 | Palkovice | 16 | 7:00 | 12:00 | 26 | Vratimov | 30 | 7:00 | 16:00 |
| 13 | Raškovice, 369 | 20 | 10:00 | 16:00 | 27 | Paskov | 24 | 8:00 | 15:00 |
| 14 | Raškovice, 206 | 22 | 12:00 | 16:00 | 28 | Nošovice, pivovar | Sklad | | |

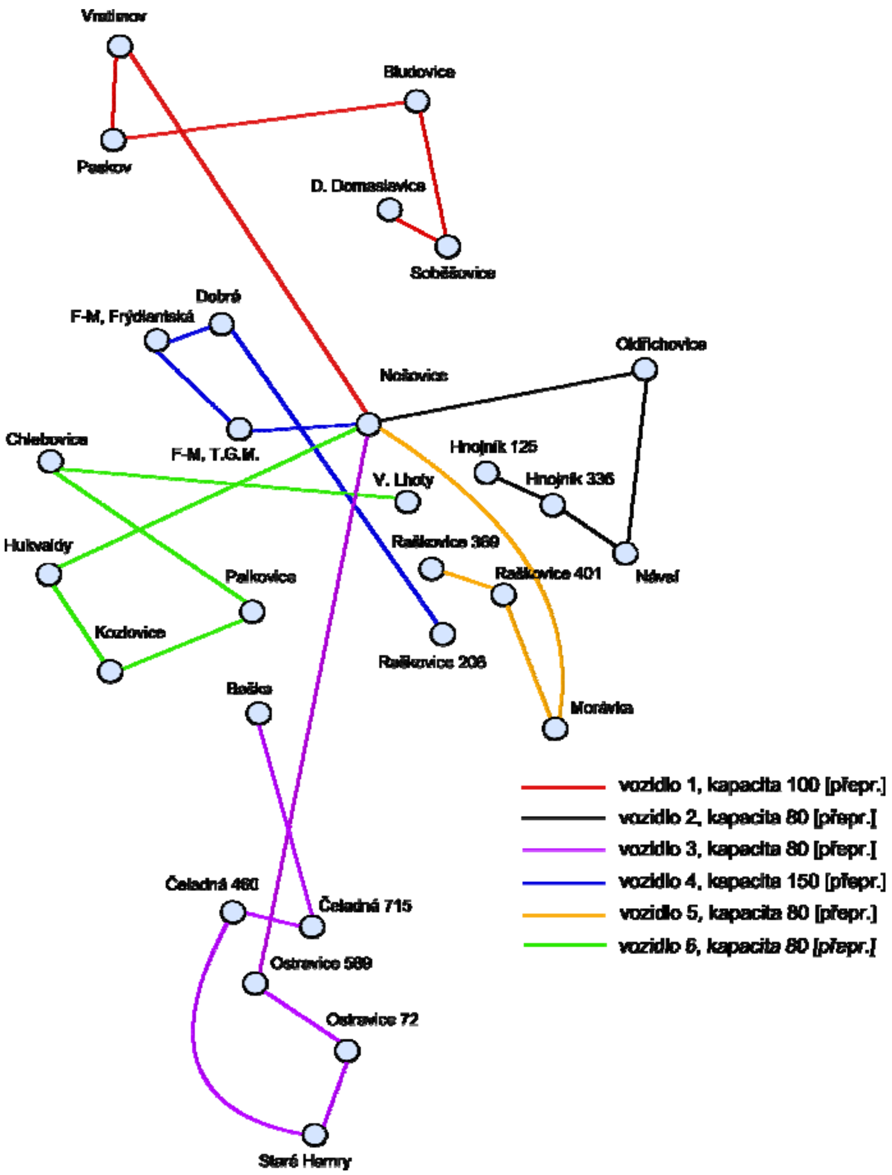
Zdroj: Autor

Výstupem z matematického modelu jsou trasy pro jednotlivá obslužná vozidla a zároveň časy obsloužení každé z prodejen. Níže prezentované řešení má hodnotu účelové funkce 327,2 km. Navržené trasy vozidel a časy obsloužení jednotlivých prodejen jsou zachyceny v tabulkách č. 4., č. 5. a zároveň zobrazeny na obrázku č. 2. Trasy vozidel jsou od sebe v obrázku barevně odlišeny.

Tab. 4 – Navržené trasy obslužných vozidel

| Vozidlo | Trasa obslužného vozidla reprezentovaná sledem uzlů. |
|---|---|
| Vozidlo č. 1 | 28-26-27-2-16-6 |
| Vozidlo č. 2 | 28-10-25-21-7 |
| Vozidlo č. 3 | 28-11-23-17-3-4-20 |
| Vozidlo č. 4 | 28-5-1-18-14 |
| Vozidlo č. 5 | 28-9-24-13 |
| Vozidlo č. 6 | 28-15-22-12-8-19 |

Zdroj: Autor




Obr. 2 – Trasy obslužných vozidel

Tab. 5 – Časy obsloužení jednotlivých prodejen

| Číslo | Obec | Čas návštěvy $[hh:mm]$ | | Skutečný čas obsluhy $[hh:mm]$ | Číslo | Obec | Skutečný čas obsluhy $[hh:mm]$ | Čas návštěvy $[hh:mm]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Frýdek-Místek, 150 | 5:30 | 10:00 | 9:56 | 15 | Hukvaldy | 10:00 | 8:00 | 10:00 |
| 2 | Bludovice | 7:00 | 12:00 | 8:16 | 16 | Soběšovice | 11:57 | 7:00 | 12:00 |
| 3 | Čeladná, 460 | 7:00 | 15:00 | 11:35 | 17 | Staré Hamry | 11:16 | 6:00 | 13:00 |
| 4 | Čeladná, 715 | 6:30 | 15:00 | 11:44 | 18 | Frýdek-Místek, 1101 | 10:00 | 5:00 | 10:00 |
| 5 | Dobrá | 6:00 | 15:00 | 6:00 | 19 | Vyšní Lhoty | 20:00 | 15:00 | 20:00 |
| 6 | Dolní Domaslavice | 8:00 | 12:00 | 12:00 | 20 | Baška | 12:00 | 10:00 | 12:00 |
| 7 | Hnojník, 125 | 13:00 | 16:00 | 16:00 | 21 | Hnojník, 336 | 15:00 | 7:00 | 15:00 |
| 8 | Chlebovice | 8:00 | 17:00 | 10:22 | 22 | Kozlovice | 10:08 | 8:00 | 12:00 |
| 9 | Morávka | 10:00 | 16:00 | 10:00 | 23 | Ostravice, 72 | 11:06 | 7:00 | 12:00 |
| 10 | Oldřichovice | 9:00 | 12:00 | 9:00 | 24 | Raškovice, 401 | 11:03 | 6:30 | 11:00 |
| 11 | Ostravice, 581 | 7:00 | 13:00 | 7:00 | 25 | Návsí | 9:14 | 8:00 | 12:00 |
| 12 | Palkovice | 7:00 | 12:00 | 10:17 | 26 | Vratimov | 7:00 | 7:00 | 16:00 |
| 13 | Raškovice, 369 | 10:00 | 16:00 | 16:00 | 27 | Paskov | 8:00 | 8:00 | 15:00 |
| 14 | Raškovice, 206 | 12:00 | 16:00 | 16:00 | 28 | Nošovice, pivovar | Sklad | | |

Zdroj: Autor

## ZÁVĚR

Předložený článek je věnován problematice navrhování obslužných tras vozidel, za předpokladu, že si zákazník kromě požadavku na množství zboží definuje taktéž časový interval, ve kterém obsluhu požaduje. Řešení této problematiky bylo uskutečněno s využitím metod lineárního programování. V rámci předloženého článku bylo prezentováno jedno z přípustných řešení, která byla při výpočetním experimentu dosažena. Tento výpočetní experiment, byl realizován v optimalizačním software Xpress-IVE, na Žilinské univerzitě v Žilině.

Vzhledem ke skutečnosti, že čas výpočtu vzorového příkladu prezentovaného v tomto příspěvku byl velmi vysoký a navíc nebylo dosaženo optimálního řešení, bude další pozornost směřována k hledání dalších matematických modelů, na základě kterých je možné obdobné úlohy řešit v kratším výpočetním čase, případně hledání takových úprav, které povedou k nalezení optimálního řešení.

## POUŽITÁ LITERATURA

(1) JANÁČEK, J. *Optimalizace na dopravních sítích.* Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, 2003. 248 s. ISBN 80-8070-031-1.

(2) BODIN, L., GOLDEN, B., ASSAD, A. *Routing and scheduling of vehicles and crews – the state of art*. Comput. Ops. Res., Vol. 10, No 2, 1983, s. 63 – 221.

(3) DESROCHERS, M., DESROSIERS, J., SOLOMON, M. *A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows*. Operations Research, Vol. 40, No 2, March-April 1992, s. 342-354.

(4) XPRESS-MP Manual "Getting Started". Dash Associates, Blisworth, UK, 2005, p. 105.

(5) XPRESS-Mosel "User guide". Dash Associates, Blisworth, 2005, UK, p. 99.