

# NELINEÁRNÍ MODEL VIBROIZOLAČNÍHO PODSTAVCE SEDADLA ŘIDIČE S NŮŽKOVÝM VODICÍM MECHANISMEM A JEHO LINEARIZACE

## NONLINEAR MODEL OF THE DRIVER'S SEAT VIBRATION ISOLATION STAND WITH SCISSOR MECHANISM AND ITS LINEARIZATION

Libor Kupka<sup>1</sup>

---

*Anotace: Vzhledem k relativní složitosti a nelinearitě uvažovaného vibroizolačního podstavce sedadla řidiče s nůžkovým vodícím mechanismem je třeba vlastnosti navrhovaných algoritmů řízení nejprve ověřit simulací na matematickém modelu. Z tohoto důvodu je v článku navržen nelineární matematický model se soustředěnými parametry, který relativně dobře zachycuje podstatné vztahy mezi akčními a regulovanými veličinami a je tedy možné jej využít při návrhu řídicího systému. Simulační model byl realizován na číslicovém počítači ve vývojovém prostředí MATLAB – Simulink. Uvedený matematický model je dále linearizován ve zvoleném bodě stavového prostoru.*

*Klíčová slova: vibroizolační podstavec, matematický model, simulace, linearizace.*

*Summary: Given the relative complexity and nonlinearity considered vibration isolation stand of the driver's seat with a scissor mechanism is necessary properties of the proposed control algorithms to verify the first simulations on a mathematical model. For this reason, the article proposed nonlinear mathematical model with concentrated parameters. Mathematical model is relatively well captures the essential relationships between action and the controlled variables and therefore can be used to design the control system. The simulation model was implemented on a computer in MATLAB – Simulink. The mathematical model is also linearized in a chosen point in state space.*

*Key words: vibration isolation stand, mathematical model, simulation, linearization.*

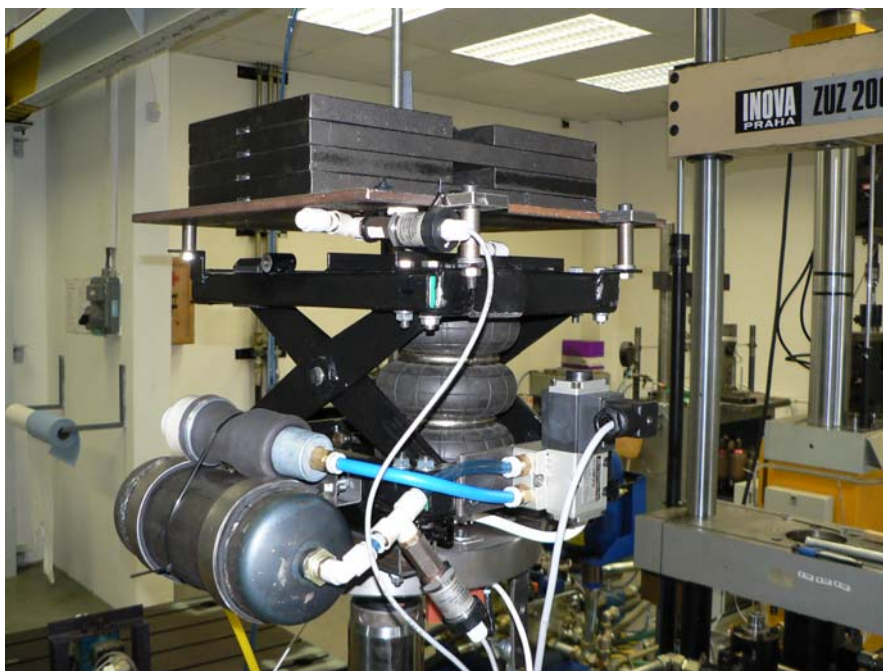
### ÚVOD

Nezbytným předpokladem k návrhu jakéhokoliv řídicího systému je znalost alespoň přibližného matematického modelu regulovaného procesu. V článku je odvozen matematický model experimentálního modelu pružícího podstavce sedadla s přímočarým vedením (1), který je při zanedbání hmot a tedy i momentů setrvačnosti ramen nůžkového vodícího mechanismu použitelný i k simulaci vlastností mechanického modelu pružícího podstavce sedadla vycházejícího z prototypu sedadla KAMAZ s nůžkovým vodícím mechanismem. Model je následně linearizován ve stavovém prostoru. S využitím Lagrangeových rovnic druhého druhu je dále odvozen matematický popis respektující vliv vodícího mechanismu.

---

<sup>1</sup> Ing. Libor Kupka, Ph.D., Univerzita Pardubice, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra řízení procesů, náměstí Čs. legií 565, 532 10 Pardubice, Tel.: +420 466 037 504, Fax: +420 466 036 241, E-mail: [libor.kupka@upce.cz](mailto:libor.kupka@upce.cz)

Na obr. 1 je fotografie v článku uvažovaného mechanického modelu pružícího podstavce sedadla řidiče vycházejícího z prototypu sedadla KAMAZ. Vodicím mechanismem je mechanismus nůžkový, k odpružení je použita vlnovcová pneumatická pružina, tlumič není v konstrukci pružícího podstavce sedadla použit.



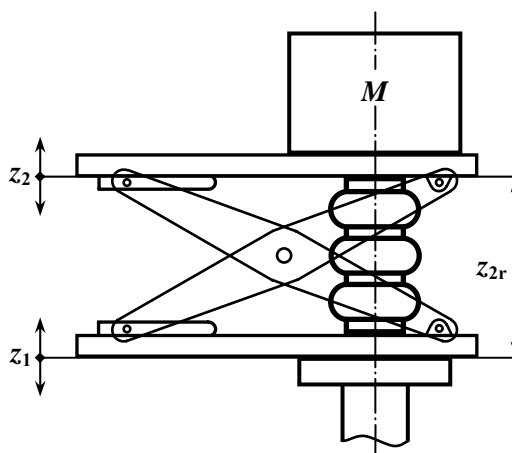
Zdroj: Autor

Obr. 1 – Model pružícího podstavce sedadla s nůžkovým mechanismem s vlnovcovou pneumatickou pružinou v laboratoři

## 1. NELINEÁRNÍ MATEMATICKÝ MODEL

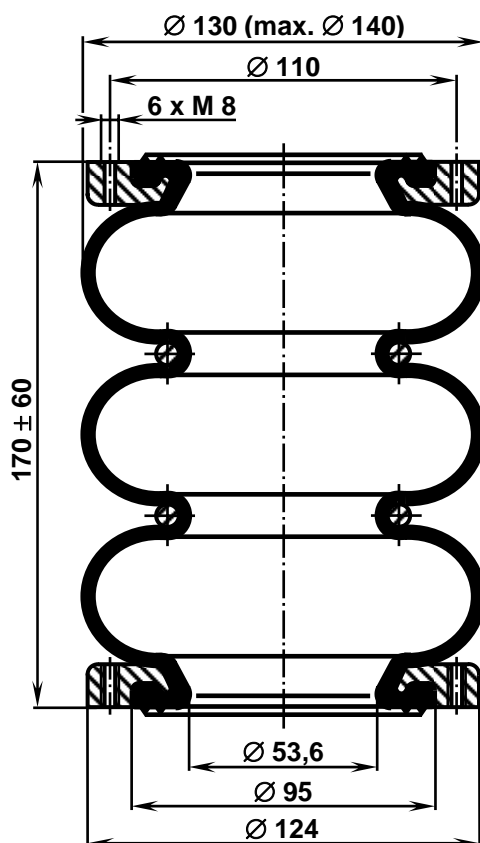
### 1.1 Popis experimentálního modelu

Principiální schéma experimentálního modelu (obr. 1) je uvedeno na obr. 2. Akčním členem je zde třívlňová rotačně symetrická vlnovcová pneumatická pružina Rubena PE 130/3 (obr. 3). Efektivní plocha pružiny je dle katalogu  $77 \text{ cm}^2$ . Model podstavce sedadla s touto vzduchovou pružinou má vlastní frekvenci  $2,35 \text{ Hz}$ .



Zdroj: Autor

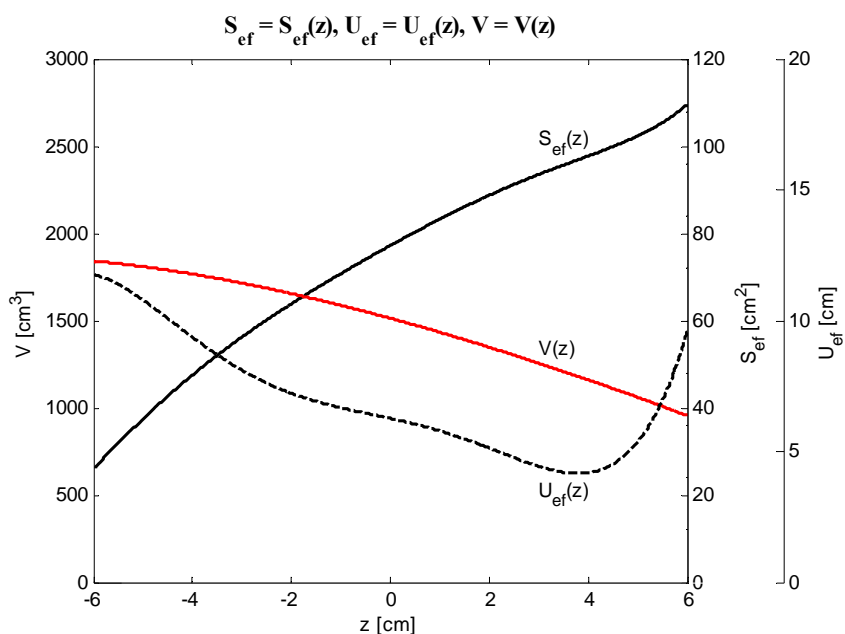
Obr. 2 – Schéma modelu pružícího podstavce sedadla s nůžkovým mechanismem s vlnovcovou pneumatickou pružinou



Zdroj: Autor

Obr. 3 – Rotačně symetrická vlnovcová pneumatická pružina Rubena PE 130/3

Experimentálně naměřené geometrické charakteristiky (efektivní plocha  $S_{ef}$ , její ukazatel  $U_{ef}$  a vnitřní objem  $V$  v závislosti na zdvihu  $z$ ) pružiny pro přetlak vzduchu uvnitř měchu 0,5 MPa jsou na obr. 4.



Zdroj: Autor

Obr. 4 – Geometrické charakteristiky pružiny Rubena PE 130/3 v závislosti na osové deformaci při přetlaku 0,5 MPa

U některých vibroizolačních systémů sedadel bývá vzduchová pružina zabudována v převodu. Konstrukce sedadla podle obr. 2 s pružinou umístěnou přímo, tj. bez převodu, nevyžaduje přidavné zařízení pro nastavení její střední výšky.

## 1.2 Základní rovnice matematického modelu

Základní schéma uvažovaného modelu sedadla je uvedeno na obr. 2. Veličiny  $z_2$  a  $z_1$  jsou okamžité absolutní polohy sedáku a základny sedadla v gravitačním poli; relativní výchylku sedáku vyjádříme  $z_{2r} = z_2 - z_1$ . Hmotnost  $M \in (40; 120)$  kg představuje redukovanou hmotnost řidiče a sedáku.

Rovnici silové dynamické rovnováhy lze zapsat ve tvaru

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{1}{M} \left[ (p_2 - p_a) S_{ef} - F_{rd} - k_d \frac{dz_{2r}}{dt} \right] - g, \quad (1)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $S_{ef}$  je efektivní plocha pružiny a  $p_2$  je přetlak uvnitř pneumatické pružiny. Efektivní plocha pružiny je nelineární funkcí relativního zdvihu sedadla,  $S_{ef} = h_1(z_{2r})$ . Tlumičiví vlastnosti jsou zohledněny koeficientem viskózního tlumení  $k_d$ .  $F_{rd}$  je dorazová síla vznikající při dosažení horního, resp. spodního dorazu, v modelu byla použita ve tvaru

$$F_{rd} = k_F \left( \frac{z_{2r}}{z_{2rmax}} \right)^n. \quad (2)$$

$n$  je liché číslo,  $n \gg 0$ , v modelu bylo voleno  $n = 501$ ,  $z_{2rmax} = z_{2max} - z_{1min}$ . Hmotnostní průtok vzduchu servoventilem  $Q_m$  při napouštění pružiny tlakovým vzduchem o tlaku  $p_1 = 0,87$  MPa (při řídicím napětí  $u_1 \geq 0$ ) vyjádříme

$$Q_m(t) = u_1(t - \tau_d) k_{v1} \sqrt{p_1 [p_1 - p_2(t)]} \quad (3)$$

a hmotnostní průtok vzduchu při vypouštění vzduchu z pružiny do atmosféry (při řídicím napětí  $u_1 < 0$ ) vyjádříme

$$Q_m(t) = u_1(t - \tau_d) k_{v2} \sqrt{p_2(t) [p_2(t) - p_a]} \quad (4)$$

$\tau_d$  je dopravní zpoždění,  $k_{v1}$  a  $k_{v2}$  jsou průtokové koeficienty,  $p_2$  je absolutní tlak vzduchu v pružině,  $p_1$  je absolutní tlak vzduchu v zásobníku a  $p_a$  je atmosférický tlak. Průtokové charakteristiky servoventilu jsou na řídicím počítači linearizovány pomocí kompenzační funkce. Po provedení kompenzace

$$Q_m(t) = k_{u1} u_1(t - \tau_d) \quad (5)$$

Pro použitý vzduchový ventil s řídicí elektronikou bylo při linearizaci průtokových charakteristik změřeno  $k_{u1} = 37$  g/(s V). Pro výpočet tlaku  $p_2$  uvnitř vzduchové pružiny vycházíme z Poissonova zákona (popis adiabatického děje v ideálním plynu)

$$p_2 \left( \frac{V}{m_v} \right)^\kappa = \text{konst} \quad (6)$$

$V$  je vnitřní objem pružiny,  $m_v$  je hmotnost vzduchu uvnitř pružiny a  $\kappa$  je exponent změny stavu vzduchu (voleno  $\kappa = 1,4$ ). Vnitřní objem pružiny je nelineární funkcí relativního zdvihu  $V = h_3(z_{2r})$ . Při proměnném  $p_2$ ,  $V$  a  $m_v$  derivujeme (6) podle času

$$\left(\frac{V}{m_v}\right)^\kappa \frac{dp_2}{dt} + p_2 \kappa \left(\frac{V}{m_v}\right)^{\kappa-1} \frac{1}{m_v} \frac{dV}{dt} - p_2 \kappa \left(\frac{V}{m_v}\right)^{\kappa-1} \frac{1}{m_v} \frac{dm_v}{dt} = 0. \quad (7)$$

V (7) je  $dm_v/dt$  množstvím vzduchu  $Q_m$  přitékajícím do pružiny

$$Q_m = \frac{dm_v}{dt}. \quad (8)$$

Rovnici (7) vydělíme  $(V/m_v)^\kappa$  a po úpravách obdržíme diferenciální rovnici

$$\frac{dp_2}{dt} = p_2 \kappa \left( \frac{Q_m}{m_v} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \right). \quad (9)$$

Časovou derivaci objemu pružiny lze vyjádřit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dz_{2r}} \frac{dz_{2r}}{dt} = \frac{dV}{dz_{2r}} \left( \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right), \quad \frac{dV}{dz_{2r}} = h_4(z_{2r}) = \frac{dh_3(z_{2r})}{dz_{2r}}.$$

Do matematického modelu, který je tvořen rovnicemi (1), (3) a (4) resp. (5), (8) a (9), vstupuje porucha  $dz_1/dt$  a akční veličina  $u_1$ . Poslední rovnicí matematického modelu je

$$z_1(t) = \int_0^t \frac{dz_1(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (10)$$

## 2. LINEARIZACE MODELU VE STAVOVÉM PROSTORU

V rovnici (1) mohou být použity fyzikální veličiny, jejich derivace a koeficient  $k_d$  vyjádřené v soustavě SI:  $d^2z_2/dt^2$  [ $m/s^2$ ],  $M$  [ $kg$ ],  $p_2$  [ $Pa$ ],  $S_{ef}$  [ $m^2$ ],  $F_{rd}$  [ $N$ ],  $k_d$  [ $kg^2/s$ ],  $dz_{2r}/dt$  [ $m/s$ ],  $g$  [ $m/s^2$ ]. Tyto veličiny jsou pro popisovaný systém hodnotově velmi rozdílné, takže vzhledem k následné linearizaci stavového popisu modelu zapíšeme (1) s fyzikálními jednotkami  $d^2z_2/dt^2$  [ $cm/s^2$ ],  $M$  [ $kg$ ],  $p_2$  [ $MPa$ ],  $S_{ef}$  [ $cm^2$ ],  $F_{rd}$  [ $N$ ],  $k_d$  [ $kg^2/s$ ],  $dz_{2r}/dt$  [ $cm/s$ ],  $g$  [ $m/s^2$ ]

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{10^2}{M} \left[ (p_2 - p_a) S_{ef} 10^2 - F_{rd} - k_d \left( \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) 10^{-2} \right] - g 10^2. \quad (11)$$

V (9) mohou být použity fyzikální veličiny a jejich derivace v jednotkách SI:  $dp_2/dt$  [ $Pa/s$ ],  $p_2$  [ $Pa$ ],  $\kappa$  [-],  $Q_m$  [ $kg/s$ ],  $m_v$  [ $kg$ ],  $dV/dt$  [ $m^3/s$ ],  $V$  [ $m^3$ ]. Obdobně jako u (11) lze v (8) použít i jednotky  $dp_2/dt$  [ $MPa/s$ ],  $p_2$  [ $MPa$ ],  $Q_m$  [ $g/s$ ],  $m_v$  [ $g$ ],  $dV/dt$  [ $cm^3/s$ ],  $V$  [ $cm^3$ ], přičemž rovnice (8) se nezmění.

Nelineární model systému, tvořený nyní rovnicemi (5), (8) až (10) a (11), má spojitě všechny parciální derivace pravých stran uvedených rovnic, takže můžeme provést ve zvolených bodech stavového prostoru linearizaci tohoto modelu. Označme  $x_1 = m_v$ ,  $x_2 = p_2$ ,  $x_3 = dz_2/dt$ ,  $x_4 = z_{2r}$  a  $u_2 = dz_1/dt$ . V (11) již nebudeme uvažovat dorazovou sílu  $F_{rd}$ . Nejprve přepíšeme rovnice (5) a (8) do rovnice (12a). Dále přepíšeme (9) do (12b) při použití již popsaných funkcí  $h_3$  a  $h_4$ . Rovnici (11) přepíšeme do (12c) při použití již popsané funkce  $h_1$ . Rovnici (10) přepíšeme do (12d).

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = k_{u1} u_1(t - \tau_d) \quad (12a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \kappa x_2 \left[ \frac{k_{u1} u_1}{x_1} - \frac{(x_3 - u_2) h_4(x_4)}{h_3(x_4)} \right] \quad (12b)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{10^2}{M} [(x_2 - p_a)h_1(x_4)10^2 - (x_3 - u_2)k_d 10^{-2}] - g10^2 \quad (12c)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = x_3 - u_2 \quad (12d)$$

Soustava čtyř rovnic prvního řádu (12) je nelineárním stavovým popisem systému. Soustavu těchto rovnic zapíšeme ve vektorové formě

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) . \quad (13)$$

Linearizaci  $i$ -té rovnice soustavy rovnic (12) podle (2) zapíšeme

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left( \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (x_j - x_{j0}) + \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (u_k - u_{k0}) . \quad (14)$$

Označíme-li  $\tilde{x}_j = x_j - x_{j0}$ ,  $\dot{\tilde{x}}_j = \dot{x}_j$  a  $\tilde{u}_k = u_k - u_{k0}$ , můžeme soustavu linearizovaných stavových rovnic systému zapsat ve tvaru

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) . \quad (15)$$

Při použití doposud nepoužitého označení  $h_2 = dh_1(x_4) / dx_4$  a  $h_5 = dh_4(x_4) / dx_4$  soustavu nelineárních rovnic (12) ve zvoleném bodě  $[x_{10}, x_{20}, \dots, u_{10}, u_{20}]$  linearizujeme. Získáme tak soustavu lineárních rovnic

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = k_{u1} \tilde{u}_1(t - \tau_d) + f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 = \kappa \left\{ -x_{20} \frac{k_{u1} u_{10}}{x_{10}^2} \tilde{x}_1 + \left[ \frac{k_{u1} u_{10}}{x_{10}} - \frac{(x_{30} - u_{20}) h_4(x_{3r0})}{h_3(x_{40})} \right] \tilde{x}_2 + \right. \\ \left. - x_{20} \frac{h_4(x_{40})}{h_3(x_{40})} \tilde{x}_3 + x_{20} (x_{30} - u_{20}) \frac{h_3(x_{40}) h_5(x_{40}) - h_4^2(x_{40})}{h_3^2(x_{40})} \tilde{x}_4 \right\} + \\ + \kappa x_{20} \left[ \frac{k_{u1}}{x_{10}} \tilde{u}_1 + \frac{h_4(x_{40})}{h_3(x_{40})} \tilde{u}_2 \right] + f_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{10^2}{M} [h_1(x_{40})10^2 \tilde{x}_2 - k_d 10^{-2} \tilde{x}_3 + (x_{20} - p_a) h_2(x_{40}) 10^2 \tilde{x}_4] + \\ + \frac{k_d}{M} \tilde{u}_2 + f_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\dot{\tilde{x}}_4 = \tilde{x}_3 - \tilde{u}_2 + f_4(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \quad (16d)$$

Pokud bod  $[x_{10}, x_{20}, \dots, u_{10}, u_{20}]$ , ve kterém provedeme linearizaci soustavy nelineárních rovnic (12), bude rovnovážným stavem systému, budou funkční hodnoty  $f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  až  $f_4(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  rovny nule.

Pro jednoduchost označíme v dalším textu všechny veličiny bez vlnovek, tj.  $x_1, x_2, x_3, x_4, u_1$  a  $u_2$ . Linearizací soustavy diferenciálních rovnic (12) v rovnovážném stavu, je-li sedadlo zatíženo hmotou  $M = 80$  kg a jeho výška je nastavena do střední polohy, tj.  $x_4 = 0$ , obdržíme pro lineární stavový popis systému (15) matice (17). V uvažovaném rovnovážném stavu je pro vypočtené hodnoty funkcí  $h_1(x_{40})$  a  $h_3(x_{40})$  pracovní bod  $[x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, u_{10}, u_{20}] = [3,7951; 0,2250; 0; 0; 0; 0]$  vektorem počátečních hodnot stavových a akčních veličin. Ve výstupní rovnici volíme s použitím matice  $\mathbf{C}$  definované v (17) absolutní rychlost sedadla, tedy  $y = \mathbf{C} \mathbf{x} = \dot{x}_3 = dz_2/dt$ ; matice  $\mathbf{D} = 0$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,01649 & 0 \\ 0 & 7930 & -2,5 & -77,54 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 37 & 0 \\ 3,07145 & 0,01649 \\ 0 & 2,5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(17)

$$\mathbf{C} = [ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 ]$$

Zopakujme, že  $u_1$  je akční veličina, která vstupuje do systému s dopravním zpožděním  $\tau_d$  a  $u_2$  je poruchová veličina. V linearizovaném stavovém popisu (15) a (16) není veličina  $x_1$  říditelná. Řiditelnou část modelu (15) popíšeme maticemi

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & -0,01649 & 0 \\ 7930 & -2,5 & -77,54 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} 3,07145 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(18)

$$\mathbf{C}_C = [ 0 \quad 1 \quad 0 ]$$

Vstupní veličinou modelu (15) s maticemi (18) je akční veličina  $u_1$  s dopravním zpožděním. Veličinu  $u_1$  budeme v dalším textu označovat pouze  $u$ . Pro systém popsany maticemi (18) byl navržen stavový regulátor a lineární estimátor. Modelováním uzavřeného regulačního obvodu bylo zjištěno, že při vstupu stacionární poruchy ve tvaru impulsu, tento stavový regulátor řídí systém s nulovou regulační odchylkou na veličině  $z_{2r}$ . Vstupuje-li do systému nestacionární porucha ve tvaru skoku, řídí stavový regulátor systém s trvalou regulační odchylkou. Z tohoto důvodu byl stavový popis systému rozšířen o další stavovou veličinu  $x_5$  – do systému byl přidán integrátor

$$x_5(t) = \int_0^t x_4(\tau) d\tau + x_4(0) , \quad (19)$$

tedy  $dx_5/dt = x_4$ . Matice stavového popisu říditelné části systému s přidáním integrátorem jsou

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} 0 & -0,01649 & 0 & 0 \\ 7930 & -2,5 & -77,54 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} 3,07145 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(20)

$$\mathbf{C}_I = [ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 ]$$

Pro systém s dopravním zpožděním lze s využitím známých přístupů, tj. minimalizací zvoleného kvadratického kritéria, nebo technikou určování pólů uzavřeného regulačního obvodu, navrhnout diskretní regulátor. Převedení stavového popisu spojitého systému bez dopravního zpoždění do diskretní verze je popsáno např. v (3, 4). Předpokládejme, že řídicí veličina  $\mathbf{u}(t)$  se mění pouze v okamžicích vzorkování  $t = kT$ , kde  $k = 0, 1, \dots$  je diskretní čas,  $T$  je perioda vzorkování, a mimo okamžiky vzorkování zachovává konstantní hodnotu, pak  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) = \text{konst}$  pro  $kT \leq t < (k+1)T$ . Vstupní veličina má potom po částech konstantní (tzv. schodovitý) průběh.

Řešení stavové rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (21)$$

v diskretních okamžicích je za tohoto předpokladu např. podle (4) rovno

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau \mathbf{u}(kT) . \quad (22)$$

Zavedeme-li dále matice

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}T} \quad \text{a} \quad \mathbf{N} = e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau ,$$

je řešení rovno

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{M} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{N} \mathbf{u}(kT) . \quad (23)$$

Výstupní rovnici

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (24)$$

diskretizujeme snadno přímo dosazením za  $t = kT$ , tedy

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT) \quad (25)$$

Stavové veličiny spojitého a diskretního popisu jsou shodné. Je zřejmé, že pro vstupní veličinu  $\mathbf{u}(t)$  mající schodovitý průběh jsou v čase  $t = kT$  hodnoty stavu  $\mathbf{x}(kT)$  i výstupu  $\mathbf{u}(kT)$  totožné. Diskretní stavový popis uvažovaného ryze dynamického SISO systému, prozatím stále bez dopravního zpoždění, zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{M} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{N} \mathbf{u}(kT) ; \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{x}(kT) . \quad (26)$$

Je-li perioda vzorkování volena  $T = 0,01$  s, jsou matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  diskretního stavového popisu říditelné části systému (20) s přidaným integrátorem

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,9935 & -0,0001623 & 6,33e-5 & 0 \\ 78,05 & 0,9651 & -0,7632 & 0 \\ 0,3925 & 0,009842 & 0,9962 & 0 \\ 0,001312 & 4,95e-5 & 0,009987 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,02515 \\ 1,206 \\ 0,00403 \\ 1,009e-5 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Měřením na systému bylo zjištěno dopravní zpoždění  $\tau_d = 0,0418$  s. Uvedme dále matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  diskretního systému s dopravním zpožděním  $\tau_{dz} = 0,0018$  s, které je zbytkem po celočíselném dělení dopravního zpoždění  $\tau_d$  periodou vzorkování  $T = 0,01$  s, vypočtené v MATLABu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,9935 & -0,0001623 & 6,33e-5 & 0 & 0,005499 \\ 78,05 & 0,9651 & -0,7632 & 0 & 0,3933 \\ 0,3925 & 0,009842 & 0,9962 & 0 & 0,001805 \\ 0,001312 & 4,95e-5 & 0,009987 & 1 & 5,524e-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,02515 \\ 0,8124 \\ 0,002225 \\ 4,568e-6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Diskutovaný diskretní systém má nulové diskretní dopravní zpoždění. Z porovnání (17) a (18) je zřejmé, jak se liší matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  systému bez dopravního zpoždění a systému s dopravním zpožděním menším než je perioda vzorkování. U systému (18) přibyla stavová veličina  $x_6(k+1) = u(k)$ , neboli  $x_6(k) = u(k-1)$ . Diskretní popis systému s diskretním dopravním zpožděním  $n_d$  zapíšeme



$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{M}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{N}u[(k-n_d)T]; \quad y(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT). \quad (29)$$

Diskrétní popis systému s dopravním zpožděním  $\tau_d = 0,0418$  s je tvořen maticemi (18) a jeho diskrétní dopravní zpoždění je  $n_d = 4$ , tedy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,9935 & -0,0001623 & 6,33e-5 & 0 & 0,005499 \\ 78,05 & 0,9651 & -0,7632 & 0 & 0,3933 \\ 0,3925 & 0,009842 & 0,9962 & 0 & 0,001805 \\ 0,001312 & 4,95e-5 & 0,009987 & 1 & 5,524e-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,02515 \\ 0,8124 \\ 0,002225 \\ 4,568e-6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n_d = 4$$

Zavedením diskrétního dopravního zpoždění  $n_d$  do matic diskrétního systému, získáme popis ve tvaru (16). Matice stavového popisu systému  $\mathbf{M}_R$ ,  $\mathbf{N}_R$  a  $\mathbf{C}_R$  pro diskutovaný případ jsou

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0,9935 & -0,0001623 & 6,33e-5 & 0 & 0,005499 & 0,02515 & 0 & 0 & 0 \\ 78,05 & 0,9651 & -0,7632 & 0 & 0,3933 & 0,8124 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3925 & 0,009842 & 0,9962 & 0 & 0,001805 & 0,002225 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001312 & 4,95e-5 & 0,009987 & 1 & 5,524e-6 & 4,568e-6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

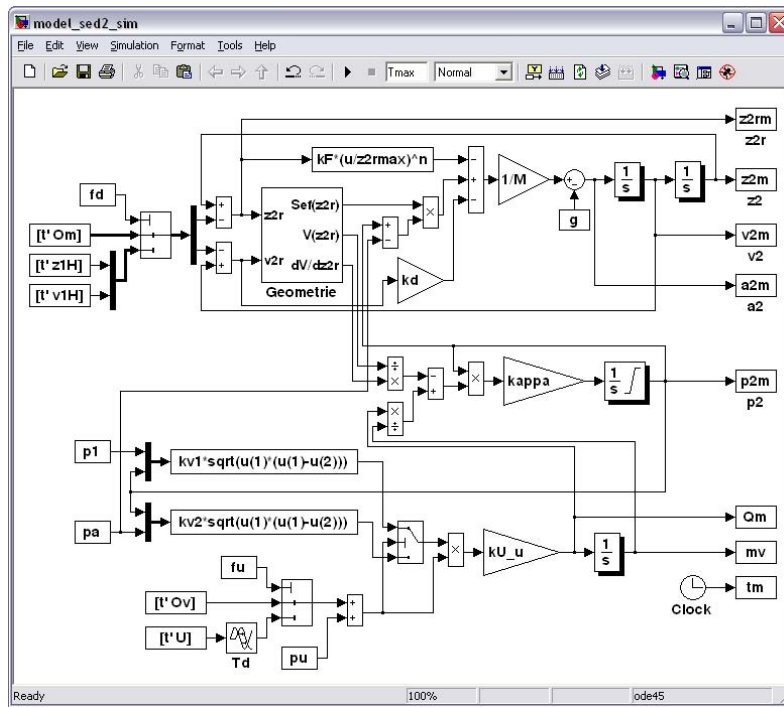
Stavový regulátor systému, který lze navrhnout např. s využitím prostředí MATLAB, bude obsahovat 9 koeficientů.

### 3. SIMULAČNÍ MODELY

Za účelem ověření několika algoritmů řízení a nalezení toho nejvhodnějšího pro aplikaci na mechanickém modelu sedadla, byl podle rovnic uvedených v odstavci 1 naprogramován model na číslicovém počítači. Model byl realizován ve vývojovém prostředí MATLAB – Simulink (viz obr. 5) a umožňuje značnou variabilitu typů vstupních budících funkcí (poruch) a parametrů systému.

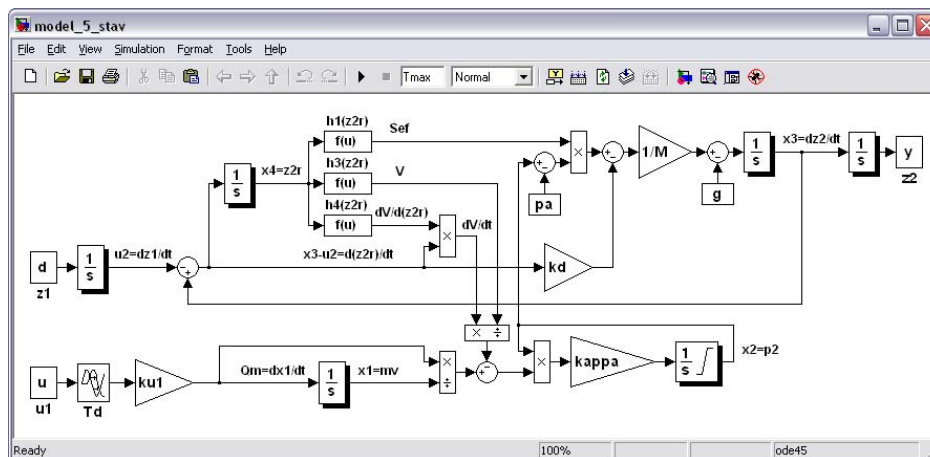
V modelu na obr. 6 jsou vyznačeny jednotlivé stavové veličiny, tak jak byly zavedeny v odstavci 2, tj.  $x_1 = m_v$ ,  $x_2 = p_2$ ,  $x_3 = dz_2/dt$ ,  $x_4 = z_{2r}$ . Do modelu vstupuje s dopravním zpožděním  $\tau_d$  akční veličina  $u = u_1$  a poruchová veličina  $d = z_1$ ;  $u_2 = dz_1/dt$ . Výstupem modelu je absolutní výchylka sedáku  $y = z_2$ .

Se simulačním schématem na obr. 6 koresponduje soustava čtyř rovnic prvního řádu (12), jež je nelineárním stavovým popisem systému. Linearizací této soustavy diferenciálních rovnic jsme získali linearizovaný stavový model (15) popsáný maticemi (17). Realizace modelu v prostředí MATLAB – Simulink je na obr. 7.



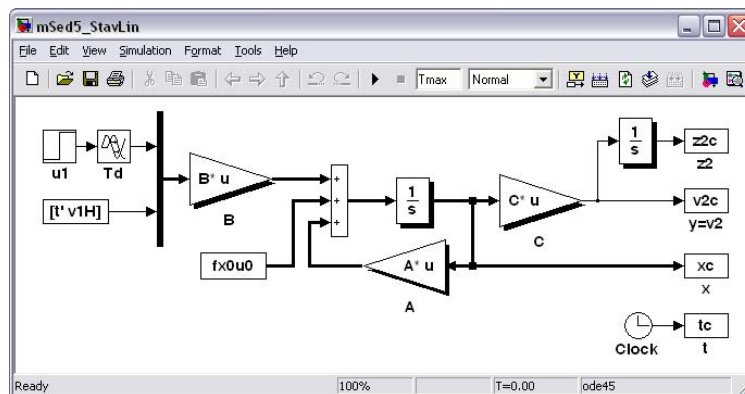
Zdroj: Autor

Obr. 5 – Programové simulační schéma modelu sedadla řidiče realizované v prostředí MATLAB – Simulink



Zdroj: Autor

Obr. 6 – Simulační schéma modelu sedadla řidiče s vyznačením stavových veličin

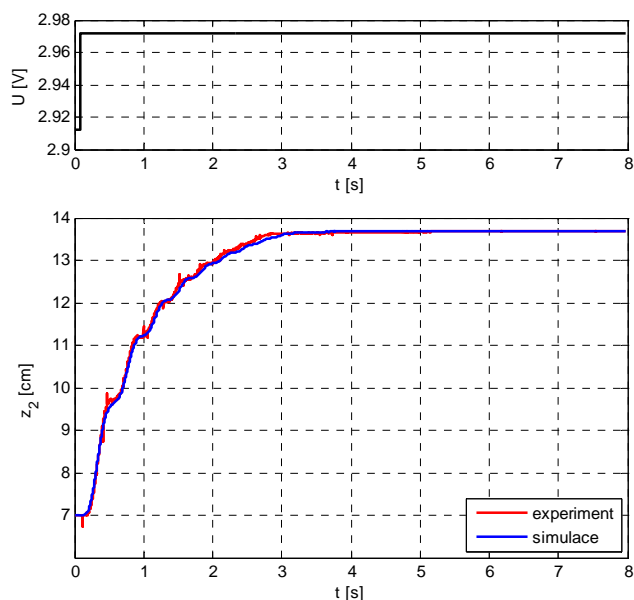


Zdroj: Autor

Obr. 7 – Simulační schéma linearizovaného modelu sedadla řidiče ve stavovém prostoru

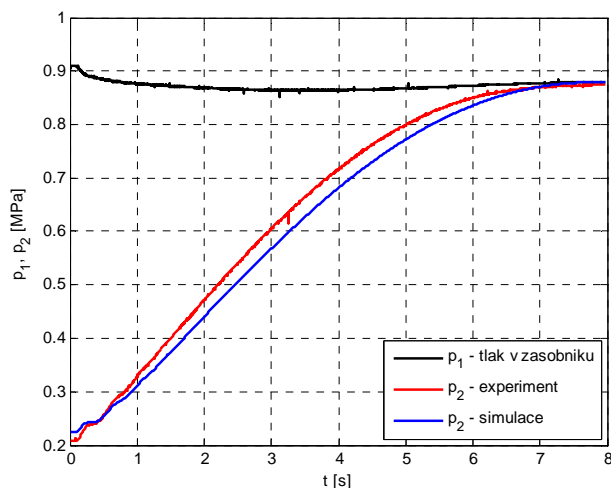
Výstupem modelu (obr. 7) je absolutní rychlost pohybu sedáku, kterou vybíráme ze stavového vektoru  $\mathbf{x}$  prostřednictvím matice  $\mathbf{C}$  definované v (17). Jelikož  $x_3 = v_2 = dz_2/dt$ , je možné doplněním modelu o další integrátor simulovat požadovaný průběh absolutní výchylky sedáku  $z_2$ .

Porovnání dynamiky simulačního (obr. 5) a laboratorního modelu provedeme při skokové změně řídicího napětí ventilu (viz obr. 8), jejíž velikost odpovídá měření provedenému na laboratorním modelu. Skok byl proveden z ustálené hodnoty napětí  $U_0 = 2,912$  V, při kterém je nulový průtok ventilem. Uvažujme zároveň, že  $u_2 = dz_1/dt = 0$ , tj. případ kdy do systému nevstupuje porucha. Na obr. 8 jsou uvedeny odpovídající odezvy laboratorního a simulačního modelu. Na obr. 9 je porovnání průběhů vývoje absolutního tlaku uvnitř měchu pneumatické pružiny obou modelů. Lze konstatovat, že z hlediska dynamiky bylo dosaženo relativně dobré shody simulačního počítačového modelu s chováním reálného systému.



Zdroj: Autor

Obr. 8 – Naměřené a simulované odezvy na skokovou změnu řídicího napětí ventilu



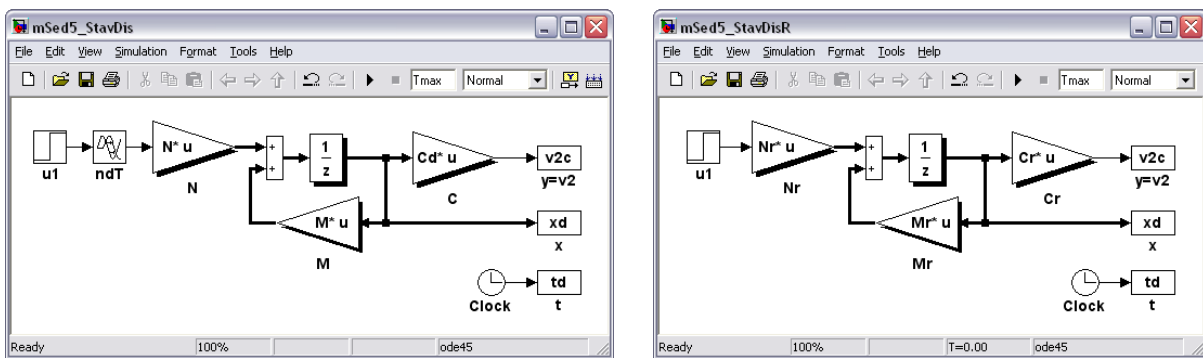
Zdroj: Autor

Obr. 9 – Porovnání naměřeného a simulovaného průběhu tlaku v pneumatické pružině

K praktickému ustálení polohy sedadla  $z_2$  dochází přibližně v čase  $t = 4$  s. I nadále však dochází ke zvyšování tlaku v měchu pružiny  $p_2$  až na hodnotu odpovídající tlaku v zásobníku tlakového vzduchu (viz obr. 9). Tento rozpor je způsoben zastavením pohybu sedadla v okamžiku dosažení horního dorazu, který je v počítačovém modelu simulován pomocí dorazové síly  $F_{rd}$ .

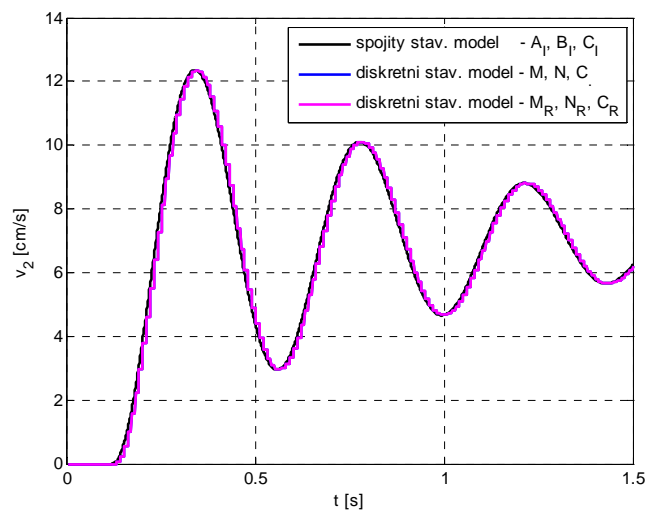
Z grafu na obr. 9 je také zřejmé, že v průběhu měření nedošlo k úplnému ustálení tlaku v pružině. V okamžiku provedení skokové změny řídicího napětí servoventilu dojde k jeho otevření (k napouštění pružiny tlakovým vzduchem), které je úměrné konkrétní velikosti tohoto napětí. V důsledku toho dojde v zásobníku k poklesu tlaku. S rostoucím časem dochází k postupnému vyrovnávání obou tlaků a to prakticky až do okamžiku dosažení počátečního tlaku v zásobníku.

Provedeme-li v souladu s odst. 2 diskretizaci modelu (20), struktura výsledného diskrétního modelu je ve tvaru (29) s maticemi (30). Připomeňme, že diskrétní dopravní zpoždění  $n_d = 4$  a perioda vzorkování  $T = 0,01$  s. Zavedením diskrétního dopravního zpoždění  $n_d$  do matic diskrétního systému, získáme popis ve tvaru (26) s maticemi (31). Odpovídající simulační schémata jsou uvedena na obr. 10.



Zdroj: Autor

Obr. 10 – Simulační schéma diskrétního stavového modelu sedadla řidiče podle (30) resp. (31)



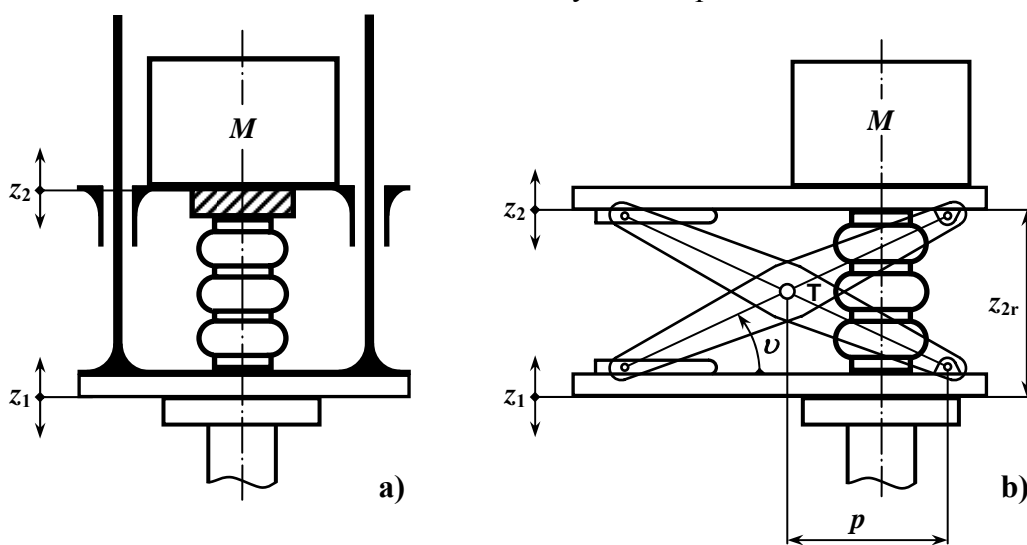
Zdroj: Autor

Obr. 11 – Porovnání výstupu spojitého a diskretních stavových modelů (absolutní rychlost pohybu sedáku)

Je zřejmé, že průběhy stavových veličin získané simulací na modelech na obr. 10 musí být zcela totožné. Na obr. 11 je porovnání simulovaných průběhů absolutní rychlosti sedáku  $v_2$ , které byly obdrženy simulací na spojitém modelu a také na obou uvedených diskretních modelech.

#### 4. ZOHLEDNĚNÍ VLIVU VODICÍHO MECHANISMU

Při změně výškového přestavení sedadla dochází jednak ke změně redukovaného momentu setrvačnosti, ale také ke změně efektivní plochy a vnitřního objemu pružiny. To má za následek určitou závislost vlastní frekvence na výškovém přestavení.



Zdroj: Autor

Obr. 12 – Schéma pružícího podstavce sedadla s přímočarým a nůžkovým vodícím mechanismem

K řešení pohybu systému na obr. 12a resp. 12b lze použít metodu Lagrangeových rovnic, které jsou založeny na energetickém principu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta K}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta K}{\delta q_j} = Q_j(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (32)$$

pro  $j = 1, \dots, n$ , kde  $n$  je počet stupňů volnosti soustavy,  $q_j$  jsou zobecněné souřadnice,

$$K = K(q_j, \dot{q}_j, t)$$

je kinetická energie soustavy a  $Q_j$  jsou zobecněné síly. Ty je možno rozložit na součet konzervativních potenciálních sil  $Q_j^{(p)}$ , disipačních sil  $Q_j^{(d)}$  a zobecněných vnějších sil  $Q_j^{(v)}$ . Potenciální konzervativní síly lze dále vyjádřit

$$Q_j^{(p)} = - \frac{\delta P}{\delta q_j}, \quad (33)$$

příčemž

$$P = P(q_j, t)$$

je potenciální energie soustavy. Disipační síly lze vyjádřit

$$Q_j^{(d)} = -\frac{\delta R}{\delta \dot{q}_j}, \quad (34)$$

přičemž

$$R = R(\dot{q}_j, t)$$

je tzv. Rayleighova disipační funkce. Pojem disipačních sil se vztahuje k procesům, při nichž se v systému maří energie (např. tření). Disipační síly se obvykle mění se složkami rychlosti (5, 6, 7).

Pro dynamický systém, v případě, kdy na tento systém působí vnější síly, které nemají potenciál a současně v něm působí také síly potenciální a disipační, zapíšeme Lagrangeovy rovnice II. druhu podle (5) ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta K}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta K}{\delta q_j} = Q_j^{(v)} - \frac{\delta P}{\delta q_j} - \frac{\delta R}{\delta \dot{q}_j}. \quad (35)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že vodicím mechanismem v mechanickém modelu pružícího podstavce sedadla je mechanismus nůžkový (obr. 12b) a pneumatická pružina je umístěna přímo mezi horní a dolní základnou, zvolíme za obecnou souřadnici relativní zdvih sedáku  $z_{2r}$ . Úhel mezi ramenem nůžkového mechanismu a základnou označíme  $\nu$ , délku ramene  $l_R$ , jeho hmotnost  $m_R$  a moment setrvačnosti vzhledem k těžišti  $I_R$ .

Kinetická energie soustavy na obr. 12b je dána kinetickou energií čtyř hmotných ramen nůžkového mechanismu konajících obecný rovinný pohyb a kinetickou energií sedáku včetně části hmoty operátora. Kinetickou energii sedáku vyjádříme

$$K_1 = \frac{1}{2} M (\dot{z}_{2r} + \dot{z}_1)^2 \quad (36)$$

a kinetickou energii ramen nůžkového mechanismu, které vykonávají rotační pohyb okolo bodu T a současně pohyb translační, vyjádříme

$$K_2 = 4 \left\{ \frac{1}{2} m_R \left[ \dot{p}^2 + \left( \frac{\dot{z}_{2r}}{2} + \dot{z}_1 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_R \dot{\nu}^2 \right\}, \quad (37)$$

kde  $p$  je okamžitá vzdálenost bodu T od místa uchycení ramen. Vyjádříme-li dále časovou derivaci úhlu  $\nu$  formálně ve tvaru

$$\dot{\nu} = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d\nu}{dz_{2r}} \frac{dz_{2r}}{dt} = \frac{d\nu}{dz_{2r}} \dot{z}_{2r},$$

bude kinetická energie ramen mechanismu

$$K_2 = 4 \left\{ \frac{1}{2} m_R \left[ \dot{p}^2 + \left( \frac{\dot{z}_{2r}}{2} + \dot{z}_1 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_R \left( \frac{d\nu}{dz_{2r}} \right)^2 \dot{z}_{2r}^2 \right\}. \quad (38)$$

Celková kinetická energie je pak dána součtem

$$K = K_1 + K_2. \quad (39)$$

Potenciální energii sedáku vyjádříme

$$P_1 = M g (z_{2r} + z_1) \quad (40)$$

a potenciální energii ramen nůžkového mechanismu

$$P_2 = 4 m_R g \left( \frac{z_{2r}}{2} + z_1 \right) \quad (41)$$

Celková potenciální energie je dána součtem

$$P = P_1 + P_2 . \quad (42)$$

Za předpokladu, že v popisovaném systému uvažujeme viskózní tlumení, lze disipační funkci vyjádřit ve tvaru

$$R = \frac{1}{2} k_d \dot{z}_{2r}^2 , \quad (43)$$

kde  $k_d$  je koeficient viskózního tlumení.

Proveďme nyní potřebné parciální a časové derivace výrazů (36), (38), (40), (41) a (43) tak, abychom je mohli dosadit do vztahu (35). Vyjádříme nejprve jednotlivé derivace kinetické energie

$$\frac{\partial K_1}{\partial z_{2r}} = 0 ; \quad \frac{\partial K_1}{\partial \dot{z}_{2r}} = M \dot{z}_{2r} + M \dot{z}_1 ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_1}{\partial \dot{z}_{2r}} \right) = M \ddot{z}_{2r} + M \ddot{z}_1 ;$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial z_{2r}} = 4 I_R \frac{d\nu}{dz_{2r}} \frac{d^2\nu}{dz_{2r}^2} \dot{z}_{2r}^2 ; \quad \frac{\partial K_2}{\partial \dot{z}_{2r}} = m_R \dot{z}_{2r} + 2 m_R \dot{z}_1 + 4 I_R \left( \frac{d\nu}{dz_{2r}} \right)^2 \dot{z}_{2r} ;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{z}_{2r}} \right) = m_R \ddot{z}_{2r} + 2 m_R \ddot{z}_1 + 8 I_R \frac{d\nu}{dz_{2r}} \frac{d^2\nu}{dz_{2r}^2} \dot{z}_{2r}^2 + 4 I_R \left( \frac{d\nu}{dz_{2r}} \right)^2 \ddot{z}_{2r}$$

a tedy v souladu s (39)

$$\frac{\partial K}{\partial z_{2r}} = 4 I_R \frac{d\nu}{dz_{2r}} \frac{d^2\nu}{dz_{2r}^2} \dot{z}_{2r}^2 , \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{z}_{2r}} \right) = \left[ M + m_R + 4 I_R \left( \frac{d\nu}{dz_{2r}} \right)^2 \right] \ddot{z}_{2r} + 8 I_R \frac{d\nu}{dz_{2r}} \frac{d^2\nu}{dz_{2r}^2} \dot{z}_{2r}^2 + (M + 2 m_R) \ddot{z}_1 . \quad (45)$$

Dále parciální derivace potenciální energie

$$\frac{\partial P_1}{\partial z_{2r}} = M g ; \quad \frac{\partial P_2}{\partial z_{2r}} = 2 m_R g ,$$

tedy v souladu s (42)

$$\frac{\partial P}{\partial z_{2r}} = (M + 2 m_R) g . \quad (46)$$

Zbývá vyjádřit parciální derivaci disipační funkce

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{z}_{2r}} = k_d \dot{z}_{2r} , \quad (47)$$

Rovnici (35) pro uvažovaný systém s jedním stupněm volnosti (tj.  $j = 1$ ) zapíšeme s využitím (44) až (47)

$$\left[ M + m_R + 4I_R \left( \frac{d\nu}{dz_{2r}} \right)^2 \right] \ddot{z}_{2r} + 4I_R \frac{d\nu}{dz_{2r}} \frac{d^2\nu}{dz_{2r}^2} \dot{z}_{2r}^2 + (M + 2m_R)(g + \ddot{z}_1) =$$

$$= F_s - F_{rd} - k_d \dot{z}_{2r}$$
(48)

kde dorazovou sílu  $F_{rd}$  vznikající při dosažení horního resp. spodního dorazu vyjádříme dle vztahu (2). Za předpokladu, že je efektivní plocha pneumatické pružiny funkcí zdvihu, tj.  $S_{ef} = S_{ef}(z_{2r})$ , platí pro sílu pružiny vztah

$$F_s = S_{ef}(p_2 - p_a) .$$
(49)

Jestliže je relativní zdvih  $z_{2r} = l_R \sin \nu$ , vyjádříme úhel mezi ramenem a základnou ve tvaru  $\nu = \arcsin(z_{2r}/l_R)$  a jeho derivace pak ve tvaru

$$\frac{d\nu}{dz_{2r}} = (l_R^2 - z_{2r}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^2\nu}{dz_{2r}^2} = z_{2r} (l_R^2 - z_{2r}^2)^{-\frac{3}{2}} .$$

Poznamenejme, že výše odvozenou rovnicí (48) lze užít i pro řešení systému na obr. 12a. Jestliže  $m_R = 0$  a  $I_R = 0$  a je-li zároveň  $z_{2r} = z_2 - z_1$ , přejde rovnice (48) na rovnici (1).

## ZÁVĚR

V předkládaném příspěvku je odvozen nelineární matematický model pružícího podstavce sedadla řidiče s nůžkovým vodicím mechanismem, který konstrukčně vychází z prototypu sedadla KAMAZ. Model je dále linearizován ve stavovém prostoru; jsou popsány spojité i diskrétní stavové modely. Ve stručnosti jsou popisovány i počítačové simulační modely realizované v prostředí MATLAB – Simulink, jejichž chování je porovnáváno s reálným mechanickým modelem umístěným v laboratoři. V závěru příspěvku je na základě Lagrangeových rovnic II. druhu odvozen model, který zahrnuje vliv vodicího mechanismu.

*Příspěvek vznikl v rámci řešení výzkumného záměru Dopravní fakulty Jana Pernera Univerzity Pardubice MSM 0021627505 „Řízení, optimalizace a diagnostika složitých systémů“ s finanční podporou MŠMT ČR.*

## POUŽITÁ LITERATURA

- (1) KUPKA, L., JANEČEK, B., ŠKLÍBA, J.: Laboratory Verification of the Active Vibration Isolation of the Driver Seat. In: Recent Advances in Mechatronics – sborník mezinárodní konference Mechatronics Varšava 2007. Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 2007. s. 453–457, ISBN 978-3-540-73955-5.
- (2) NAGRATH, I. J., GOPAL, M.: Control System Engineering. 2. vyd. New York (USA): John Wiley & Sons, 1982. ISBN 0-471-09814-0.
- (3) FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., WORKMAN, M. L.: Digital Control of Dynamic Systems. 3. vyd. Stanford (USA): Prentice Hall, 1998. ISBN 0-201-82054-4.
- (4) ŠTECHA, J., HAVLENA, V.: Teorie dynamických systémů. 2. vyd. Praha: ČVUT, 1999. ISBN 80-01-01971-3.



- (5) BOTTEGA, W. J.: Engineering Vibrations. 1. vyd. New Jersey: CRC Press, 2006. ISBN 978-0-8493-3420-9.
- (6) LEECH, J. W.: Klasická mechanika. (Přeložil J. Kracík.) 1. vyd. Praha: SNTL, 1970.
- (7) JULIŠ, K. a kol.: Mechanika II: dynamika. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987.