Ročník 6., Číslo IV., listopad 2011

# VYUŽITÍ FLOYDOVA ALGORITMU NA SITÍCH

# USE OF FLOYD ALGORITHM IN NETWORKS

Denisa Mocková[1]

*Anotace: Článek se zabývá využitím Floydova algoritmu pro výpočet vzdáleností na síti, propustností sítě a nejspolehlivější cesty sítě*

*Klíčová slova: Floydův algoritmus, distanční matice, vzdálenosti na síti, propustnost sítě, nejspolehlivější cesty sítě*

*Summary: This article deals with a use of Floyd algorithm for calculation of distances in a network, permeability of a network and the most reliable paths of a network*

*Key words: Floyd algorithm, distance matrix, distances in networks, permeability of a network, the most reliable paths of a network*

## 1. FLOYDŮV ALGORITMUS PRO ZJIŠTĚNÍ VZDÁLENOSTÍ NA SÍTI

Floydův algoritmus se používá na výpočet vzdáleností mezi všemi vrcholy sítě. Ohodnocením jednotlivých hran $o(h)$ sítě je délka hrany. Floydův algoritmus je vhodné použít pro sítě s počtem hran blížícím se úplnému grafu. Je vhodný pro orientované i neorientované grafy, v našem případě budeme uvažovat pouze graf neorientovaný.

Pro sítě s malým počtem hran je z hlediska času výpočtu výhodné několikanásobné použití např. Dijkstrova algoritmu pro výpočet stromu minimálních tras, kdy každý vrchol považujeme v jednotlivých výpočtech za výchozí, tj. za kořen stromu.

Postup řešení:

**1. krok:** Sestavíme nejprve počáteční čtvercovou matici $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$, tj. matici přímých vzdáleností typu *n x n* tak, aby platilo pro prvky $c_{ij}$:

$c_{ij}$

$c_{ij} = o(h)$, *jestliže* $\exists h \in X: p(h) = (v_i, v_j), i \neq j$

$c_{ij} = 0$ *pro* $i = j$

$c_{ij} = \infty$, *jestliže* $\nexists h \in X: p(h) = (v_i, v_j), i \neq j$

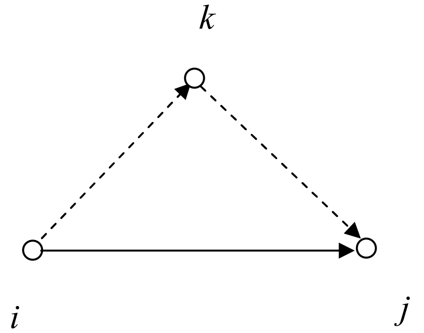
Pro neorientovaný graf bude matice *C* i každá další matice, která z ní vznikne přepočtem pomocí Floydova algoritmu, symetrická, což nám výpočet usnadní.

[1] Ing. Denisa Mocková Ph.D., ČVUT v Praze, Fakulta dopravní, Ústav řízení dopravních procesů a logistiky, Horská 3, 128 03 Praha 2, Tel.: +420224359160, Fax: +420224919017, E-mail: mockova@fd.cvut.cz

V případě, že by hrana $(v_i, v_j)$ byla smyčka, potom prvek $c_{ij}$ bude roven ohodnocení smyčky. Případné nenulové prvky na hlavní diagonále neovlivní výpočet matice vzdáleností. V případě, že bychom chtěli zohlednit vzdálenosti nutné pro projetí vrcholy, můžeme je k vypočteným vzdálenostem jednotlivých tras přičíst.

**2. krok:** Postupně konstruujeme posloupnost matic $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}, C_{k=n}$, přičemž matice $C_0$ je počáteční (výchozí) matice přímých vzdáleností. V cyklu pro $k = 1, \ldots, n$ hledáme, zda cestu z vrcholu $i$ do $j$ nelze zkrátit přes vrchol $k$.

Motivace




$$\min \{d(i, j), d(i, k) + d(k, j)\}$$

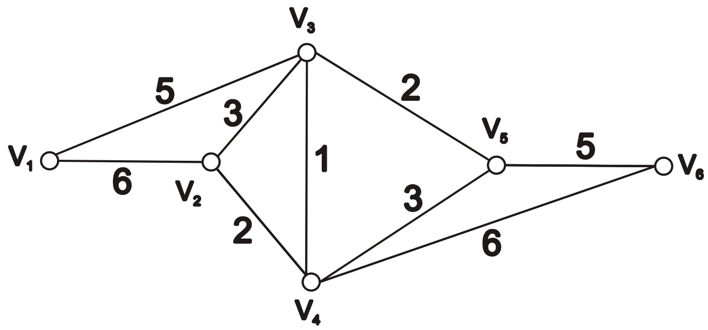
**3. krok:** Přepočet prvků matice $C$ provedeme podle vztahu:

$$c_{ij}^{(k)} = \min\left\{c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)}\right\} \tag{1}$$

kde horní indexy určují, o kterou matici se jedná

**4. krok:** Výsledná matice $C$ je maticí vzdáleností neboli maticí distanční.

Příklad – určete distanční matici a pomocí ní určete minimální cestu z vrcholu $v_1$ do vrcholu $v_5$.




Zdroj: Autor

Obr. 1 – Příklad grafu s vrcholy $v_1$ až $v_5$

**1. krok:** Úlohu budeme řešit Floydovým algoritmem, nejdříve sestavíme počáteční čtvercovou matici, matici přímých vzdáleností $C_{k=0} = (c_{ij})$.

$$C_{k=0} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

**2. a 3. krok:** Matice $C_{k=1}\ldots\ldots C_{k=6}$ podle přepočtu $c_{ij}^{(k)} = \min\left\{c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)}\right\}$

$C_{k=1}$: v matici přímých vzdáleností vyškrtneme první řádek a první sloupec, prvky přepíšeme do další matice a ostatní prvky matice dle přepočtu přepočítáme.

Např. prvek nové matice $c_{32}^{1} = \min\left\{c_{32}^{0}, c_{31}^{0} + c_{12}^{0}\right\} = \min\{3, 5+6\} = 3$ se nezmění.

Matice $C_{k=1}$ zůstává stejná:

$$C_{k=1} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_{k=2}$: v matici $C_{k=1}$ vyškrtneme druhý řádek a druhý sloupec, prvky přepíšeme do další matice, ostatní přepočítáme.

Změna nastane u prvku $c_{14}, c_{41}$, protože matice je symetrická.

$c_{14}^{2} = \min\left\{c_{14}^{1}, c_{12}^{1} + c_{24}^{1}\right\} = \min\{\infty, 6+2\} = 8$

$$C_{k=2} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 8 & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & \infty \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_{k=3}$: změní se prvky $c_{14}, c_{41}, c_{15}, c_{51}, c_{25}, c_{52}$.

$c_{14}^{3} = \min\left\{c_{14}^{2}, c_{13}^{2} + c_{34}^{2}\right\} = \min\{8, 5+1\} = 6$

$c_{15}^{3} = \min\left\{c_{15}^{2}, c_{13}^{2} + c_{35}^{2}\right\} = \min\{\infty, 5+2\} = 7$

$c_{25}^{3} = \min\left\{c_{25}^{2}, c_{23}^{2} + c_{35}^{2}\right\} = \min\{\infty, 3+2\} = 5$

$$C_{k=3} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 6 & 7 & \infty \\ 6 & 0 & 3 & 2 & 5 & \infty \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & \infty \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_{k=4}$: změní se prvky $c_{16}, c_{61}, c_{26}, c_{62}, c_{36}, c_{63}$

$$\boxed{C_{k=4} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 6 & 7 & 12 \\ 6 & 0 & 3 & 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 12 & 8 & 7 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} = C_{k=5} = C_{k=6}}$$

**4. krok:** Tato matice je výslednou distanční maticí.

Hledáme minimální cestu z $v_1$ do $v_5$ pomocí distanční matice. Do matice přímých vzdáleností místo $\infty$ budeme psát *0* a matici doplníme o první sloupec (řádek) distanční matice, první proto, že hledáme cestu z $v_1$.

$$C = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

Koncový vrchol je $v_5$, proto začneme cestu hledat na 5. řádku od konce prvkem $c_{15}^6$ a hledáme jeho předchůdce $p$.

Musí platit: $c_{15}^6 - c_{5p} = c_{1p}^6$

pro $p$ = 1: $7 - 0 = 7 \neq 0$

pro $p$ = 2: $7 - 0 = 7 \neq 6$

pro $p$ = 3: $7 - 2 = 5 = 5$

pro $p$ = 4: $7 - 3 = 4 \neq 6$

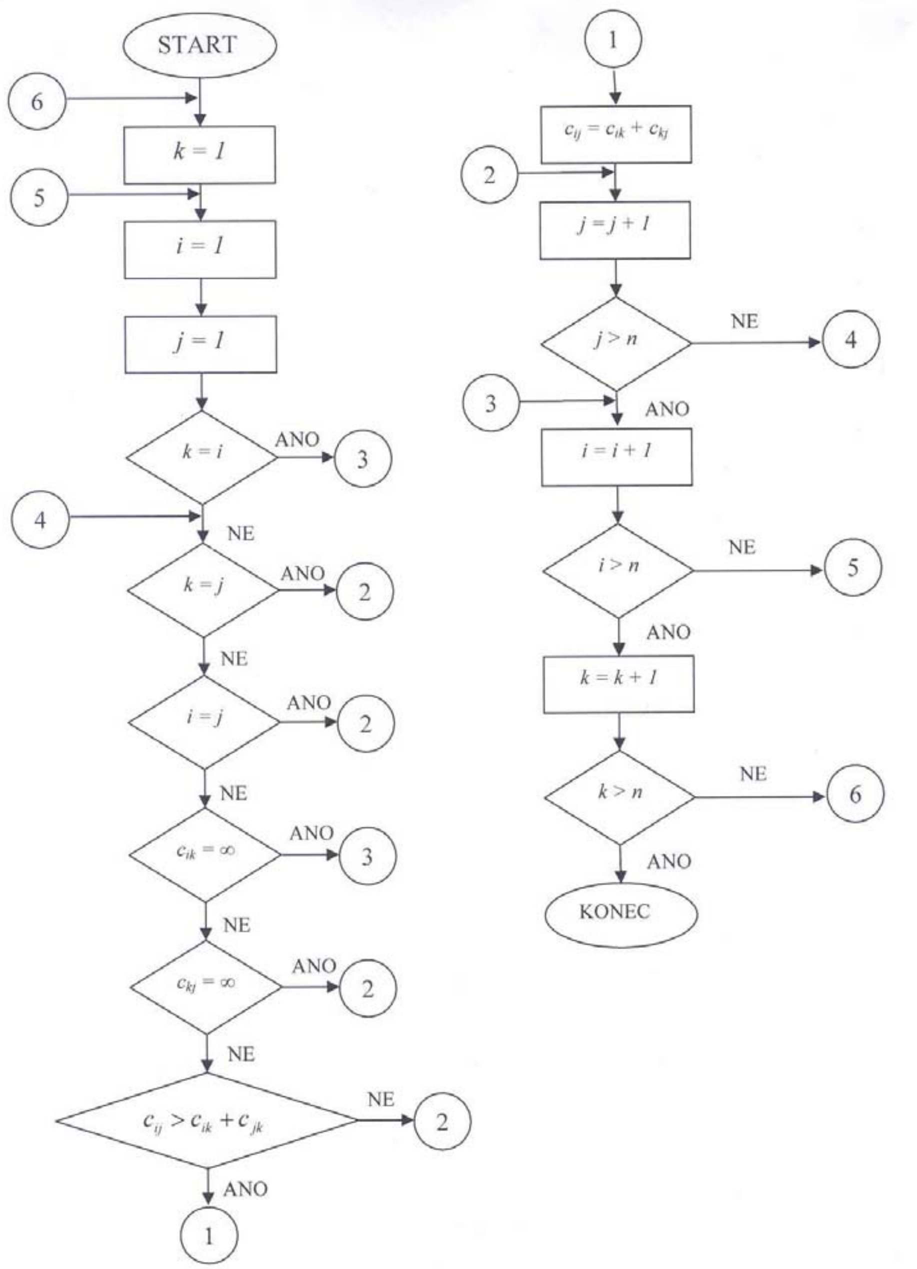
pro $p$ = 5: nepočítáme

pro $p$ = 6: $7 - 5 = 2 \neq 12$

Rovnost platí pro $p$ = 3, do cesty zařadíme $v_3$ a stejným způsobem pokračujeme dál. V případě, že existuje více rovností platí, že existuje více minimálních cest.

pro $p = 1$: $5 - 5 = 0 = 0$
pro $p = 2$: $5 - 3 = 2 \neq 6$
pro $p = 3$: nepočítáme
pro $p = 4$: $5 - 1 = 4 \neq 6$
pro $p = 5$: $5 - 2 = 3 \neq 7$
pro $p = 6$: $5 - 0 = 5 \neq 12$
Rovnost platí pro $p = 1$, do cesty zařadíme $v_1$.

Nalezená cesta povede z $v_1$, $v_3$, $v_5$ a její délka bude z distanční matice 7 délkových jednotek.

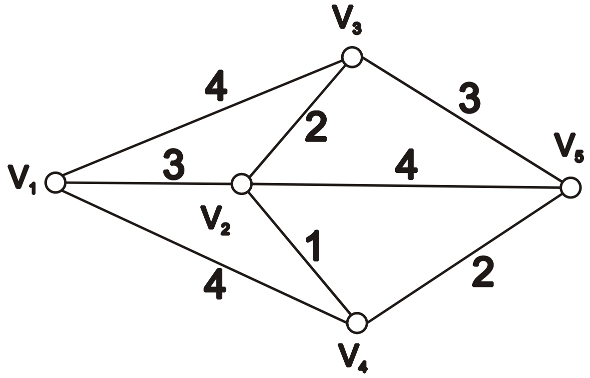



Zdroj: Autor

Obr. 2 - Vývojový diagram Floydova algoritmu

## 2. FLOYDŮV ALGORITMUS PRO URĆENÍ PROPUSTNOSTI SÍTĚ

V aplikaci se dá využít Floydův algoritmus pro výpočet propustnosti sítě, $o(h)$ jsou kapacity hran.




Zdroj: Autor

Obr. 3 – Příklad aplikace Floydova algoritmu

**1. krok:** Sestavíme nejprve počáteční čtvercovou matici $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ typu *n x n* tak, aby platilo pro prvky $c_{ij}$:

$c_{ij}$

$c_{ij} = o(h)$, *jestliže* $\exists h \in X: p(h) = (v_i, v_j), i \neq j$

$c_{ij} = \infty$ *pro* $i = j$

$c_{ij} = 0$, *jestliže* $\nexists h \in X: p(h) = (v_i, v_j), i \neq j$

**2. – 4. krok:** Princip algoritmu bude stejný, pouze přepis prvků v maticích bude podle vztahu:

$$c_{ij}^{(k)} = \max\left\{c_{ij}^{(k-1)}, \min\left(c_{ik}^{(k-1)}, c_{kj}^{(k-1)}\right)\right\} \tag{2}$$

Počáteční matice bude mít tvar:

$$C_{k=0} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & \infty & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & \infty & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & \infty & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

$C_{k=1}$: změní se prvky $c_{23}, c_{32}, c_{24}, c_{42}, c_{34}, c_{43}$.

$$c_{23}^{1} = \max\left\{c_{23}^{0}, \min\left(c_{21}^{0}, c_{13}^{0}\right)\right\} = \max\left\{2, \min(3,4)\right\} = 3$$
$$c_{24}^{1} = \max\left\{c_{24}^{0}, \min\left(c_{21}^{0}, c_{14}^{0}\right)\right\} = \max\left\{1, \min(3,4)\right\} = 3$$
$$c_{34}^{1} = \max\left\{c_{34}^{0}, \min\left(c_{31}^{0}, c_{14}^{0}\right)\right\} = \max\left\{0, \min(4,4)\right\} = 4$$

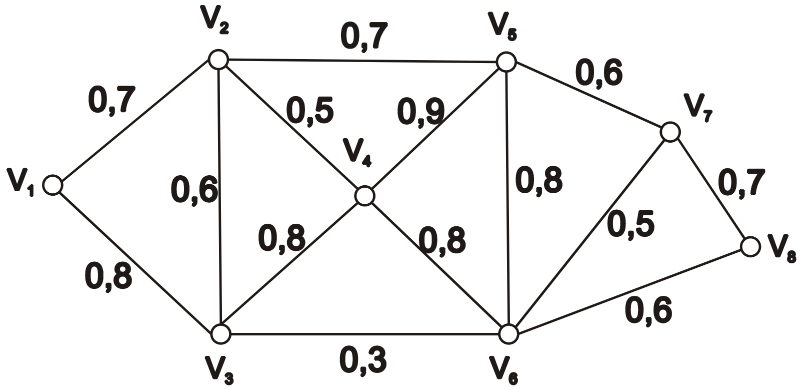
$$C_{k=1} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & \infty & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & \infty & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & \infty & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

$$C_{k=2,3,4,5} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & \infty & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & \infty & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & \infty & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & \infty \end{pmatrix} \text{ je výsledná matice}$$

Z matice pro propustnost určíme např. max. propustnost z $v_1$ do $v_5$, a to 3.

## 3. FLOYDŮV ALGORITMUS PRO SPOLEHLIVOST SÍTĚ

V aplikaci se dá využít Floydův algoritmus i pro výpočet nejspolehlivější cesty sítě pro každou dvojici vrcholů $v_i, v_j \in V$ , $o(h)$ je pravděpodobnost úspěšného průchodu hranou, $o(h) \in \langle 0,1 \rangle$




Zdroj: Autor

Obr. 4 – Příklad využití Floydova algoritmu i pro výpočet nejspolehlivější cesty sítě

**1. krok:** Sestavíme nejprve počáteční čtvercovou matici $C = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ typu *n x n* tak, aby platilo pro prvky $c_{ij}$:

$$c_{ij}$$

*$c_{ij}$ = o(h), jestliže*
$\exists h \in X: p(h) = (v_i, v_j), i \neq j$

*$c_{ij}$ = 1 pro i = j*

*$c_{ij}$ = 0, jestliže*
$\nexists h \in X: p(h) = (v_i, v_j), i \neq j$

**2. – 4. krok:** Princip algoritmu bude stejný, pouze přepis prvků v maticích bude podle vztahu:

$$c_{ij}^{(k)} = \max\left\{c_{ij}^{(k-1)}, \left(c_{ik}^{(k-1)} \bullet c_{kj}^{(k-1)}\right)\right\} \tag{3}$$

Počáteční matice podle 1. kroku:

$$C_{k=0} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix} = C_{k=1}$$

Další matice podle vztahu (3) přes všechny vrcholy

$$C_{k=2} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}35 & 0{,}49 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 0{,}42 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}49 & 0{,}7 & 0{,}42 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{k=3}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}64 & 0{,}49 & 0{,}24 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 0{,}42 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}64 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}49 & 0{,}7 & 0{,}42 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}24 & 0{,}18 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{k=4}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}64 & 0{,}576 & 0{,}512 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 0{,}72 & 0{,}64 & 0 & 0 \\ 0{,}64 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}576 & 0{,}7 & 0{,}72 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}512 & 0{,}4 & 0{,}64 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{k=5}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}64 & 0{,}576 & 0{,}512 & 0{,}346 & 0 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}63 & 0{,}7 & 0{,}56 & 0{,}42 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 0{,}72 & 0{,}64 & 0{,}432 & 0 \\ 0{,}64 & 0{,}63 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}54 & 0 \\ 0{,}576 & 0{,}7 & 0{,}72 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}512 & 0{,}56 & 0{,}64 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}346 & 0{,}42 & 0{,}432 & 0{,}54 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{k=6}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}64 & 0{,}576 & 0{,}512 & 0{,}346 & 0{,}307 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}63 & 0{,}7 & 0{,}56 & 0{,}42 & 0{,}336 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 & 0{,}72 & 0{,}64 & 0{,}432 & 0{,}259 \\ 0{,}64 & 0{,}63 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}54 & 0{,}324 \\ 0{,}576 & 0{,}7 & 0{,}72 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}36 \\ 0{,}512 & 0{,}56 & 0{,}64 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}346 & 0{,}42 & 0{,}432 & 0{,}54 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}307 & 0{,}336 & 0{,}259 & 0{,}324 & 0{,}36 & 0{,}6 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{k=7}\begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,8 & 0,64 & 0,576 & 0,512 & 0,346 & 0,307 \\ 0,7 & 1 & 0,6 & 0,63 & 0,7 & 0,56 & 0,42 & 0,336 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,8 & 0,72 & 0,64 & 0,432 & 0,302 \\ 0,64 & 0,63 & 0,8 & 1 & 0,9 & 0,8 & 0,54 & 0,378 \\ 0,576 & 0,7 & 0,72 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,6 & 0,42 \\ 0,512 & 0,56 & 0,64 & 0,8 & 0,8 & 1 & 0,5 & 0,6 \\ 0,346 & 0,42 & 0,432 & 0,54 & 0,6 & 0,5 & 1 & 0,7 \\ 0,307 & 0,336 & 0,302 & 0,378 & 0,42 & 0,6 & 0,7 & 1 \end{pmatrix} = C_{k=8}$$

$C_{k=8}$ je výsledná distanční matice pro zjištění nejspolehlivější cesty na síti.

## ZÁVĚR

Floydův algoritmus lze využít pro výpočet minimálních vzdáleností na síti, v aplikaci dále pro výpočet maximální propustnosti sítě a nejspolehlivější cesty na síti. Je součástí řady složitějších algoritmů např. řešení úloh diskrétní optimalizace, jako jsou lokační úlohy a další. Je to exaktní metoda poskytující optimální řešení, která je součástí řady heuristických a metaheuristických metod. Zpracováno v rámci VZ MŠMT 68407700/43.

## POUŽITÁ LITERATURA


(1) MOCKOVÁ, D.: *Základy teorie dopravy*, Praha: ČVUT v Praze Fakulta dopravní, ISBN 978-80-01-03791-1, 2007.

(2) MOCKOVÁ, D.: *Řešení alokačně – lokačních úloh*, disertační práce, Praha, ČVUT v Praze Fakulta dopravní, 2005.

(3) VOLEK, J.: *Operační výzkum I,* Univerzita Pardubice, Dopravní Fakulta Jana Pernera, Katedra informatiky v dopravě, Pardubice, ISBN 80-7194-410-6, 2001.