

APLIKACE ÚHOLY OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO PRO VÝBĚR OPTIMÁLNÍHO POŘADÍ FÁZÍ SVĚTELNĚ ŘÍZENÝCH KŘÍŽOVATEK

APPLICATION OF TRAVEL SALESMAN PROBLEM FOR OPTIMAL ORDER OF PHASES OF LIGHT CONTROLLED INTERSECTIONS

Michal Rusek¹

Anotace: Článek se zabývá problematikou určení optimálního pořadí fází světelně řízených křižovatek. V úvodu jsou popsány obecné problémy související s výběrem optimálního pořadí fází. Následuje teoretická část, ve které jsou popsány dva základní přístupy k řešení úlohy a to pomocí heuristické metody a pomocí matematického modelu. V následující části je provedena aplikace popsaných metod na několika příkladech a v závěru je provedeno zhodnocení použitých přístupů a získaných řešení.

Klíčová slova: dopravní proud, fáze, křižovatka, matematický model.

Summary: The article deals with determining the optimal phase sequence light controlled intersections. The introduction describes the general problems associated with the selection of the optimal phase sequence. Following the theoretical part, which describes two basic approaches to tackling tasks and using heuristic methods and using a mathematical model. The following is an application of described methods at several examples and the conclusion is an assessment of used approaches and the obtained solutions.

Key words: traffic flow, phase, intersection, mathematical model.

ÚVOD

Předkládaný článek navazuje na příspěvek publikovaný v čísle 1/2011 časopisu Perner's Contact, který se zabýval problematikou výběru minimálního počtu fází světelně řízené křižovatky. Toto je ovšem pouze jeden z několika kroků, které je potřeba učinit, aby mohl být sestaven a vyřešen samotný matematický model, jehož výstupem je signální plán. Po určení minimálního počtu fází a přiřazení proudů do těchto fází tak, aby byl každý proud alespoň v jedné fázi, je potřeba určit optimální pořadí těchto fází. Jakým způsobem je možno tento krok provést je náplní tohoto článku.

¹ Ing. Michal Rusek, Vysoká škola báňská – Technická universita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, Tel.: +420 596995755, E-mail: michal.rusek@atlas.cz

1. MOŽNÉ PŘÍSTUPY K ŘEŠENÍ ÚLOHY

Před popisem možných přístupů sloužících k řešení úlohy určení optimálního pořadí fází je potřeba objasnit, z jakého důvodu se tento problém řeší. Jak již bylo uvedeno v předchozím článku, na který je odkazováno v úvodu, v křižovatce existují tzv. kolizní proudy, tedy proudy které nemohou do křižovatky vstupovat zároveň. Tyto proudy nemohou být ve společné fázi, a proto jsou rozděleny do jednotlivých fází, ve kterých se seskupují proudy nekolizní, tedy takové, které mohou do křižovatky vstupovat zároveň. Pokud se v křižovatce přechází z jedné fáze do druhé, musí být zajištěno, aby proudy z následující fáze byly do křižovatky vpuštěny po uplynutí určité doby, která zajistí, že nedojde ke střetu kolizních proudů (tato doba se nazývá mezičas). Tato doba je ovšem z pohledu řízení křižovatky neefektivní, neboť do křižovatky v tomto okamžiku nevstupují žádná vozidla a je proto snahou, aby byla tato doba minimální a tedy aby bylo co nejvíce času z cyklu vyčleněno pro doby, ve kterých mohou vozidla vstupovat do křižovatky. Je zřejmé, že pro různé pořadí fází budou i rozdílné součty neproduktivního času a právě proto je potřeba vyhledat takové pořadí fází, u kterých bude součet neproduktivních časů minimální. K tomu je možno použít několik metod a to například heuristický algoritmus, nebo matematický model.

1.1 Heuristický algoritmus

Přestože heuristický algoritmus je velice jednoduchý, je poměrně zdlouhavý, neboť je potřeba sestavovat dílčí matice mezičasů, navíc je použitelný pouze pro křižovatky s nízkým počtem fází.

Prvním krokem, který je potřeba učinit, je sestavení všech možných pořadí fází, které mohou nastat. Tento krok je velmi důležitý, neboť je potřeba najít opravdu všechny možné kombinace, neboť pokud by byla nějaká kombinace opomenuta, je možné, že právě tato zaručuje optimální pořadí fází (v tomto případě lze i u heuristického algoritmu říci, že získáme optimální řešení, neboť je prohledávána celá množina přípustných řešení).

Ve druhém kroku je potřeba sestavit tzv. dílčí matice mezičasů. U této matice se vychází z matice mezičasů řešené křižovatky s tím, že v dílčí matici jsou pouze proudy, které jsou obsaženy ve fázích, které následují po sobě (například pro křižovatku, u které jsou 3 fáze F1 – F2 – F3 budou sestaveny dvě matice pro přechody mezi fázemi F1 – F2, tedy fáze F1 končí a fáze F2 začíná a obdobně F2 – F3 a F3 – F1, přičemž v těchto maticích budou obsaženy pouze proudy, které se nachází v těchto dvou po sobě jdoucích fázích). Podrobněji bude tento krok vysvětlen v kapitole 2.1.

V dalším kroku se pro každou možnou kombinaci pořadí fází provede součet nejvyšších hodnot z jednotlivých dílčích matic (tento součet představuje celkový neproduktivní čas při přechodech mezi fázemi v rámci jednoho cyklu). Z těchto součtů se pak vybere ten s nejnižší hodnotou (tedy s nejnižší hodnotou neproduktivního času) a kombinace pořadí fází s touto nejnižší hodnotou představuje optimální pořadí fází.

1.2 Využití matematického modelu úlohy obchodního cestujícího

Druhým způsobem, kterým lze vyřešit problém vyhledání optimálního pořadí fází je transformace tohoto problému na úlohu obchodního cestujícího. Výchozí úvaha je taková, že obchodní cestující musí navštívit všechny vrcholy tak, aby celková ujetá vzdálenost byla co nejnižší. V transformované úloze vrcholy představují jednotlivé fáze a délka cesty představuje maximální mezičas mezi dvěma kolizními proudy v sousedních fázových skupinách. Musí tedy proběhnout všechny fáze a součet maximálních mezičasů musí být minimální.

Matematický model úlohy obchodního cestujícího, sloužící k výběru optimálního pořadí fází má následující tvar:

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in F} c_{ij} x_{ij} \quad i \neq j \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{i \in F \\ i \neq j}} x_{ij} = 1 \quad j \in F \quad (2)$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij} = \sum_{i \in F} x_{ji} \quad j \in F, i \neq j \quad (3)$$

$$y_i - y_j + Nx_{ij} \leq N - 1 \quad i = 2..N, j = 2..N, i \neq j \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in F, j \in F, i \neq j \quad (5)$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 2..N$$

V tomto modelu bivalentní proměnná x_{ij} modeluje skutečnost, že po fázi i následuje fáze j . Tedy pokud po fázi i následuje fáze j , $x_{ij} = 1$ a pokud po fázi i nenásleduje fáze j , $x_{ij} = 0$. Prvky c_{ij} jsou prvky matice maximálních mezičasů mezi kolizními proudy ve fázích i a j . Prvek N představuje počet fází a proměnná y_i modeluje pořadí, ve kterém se realizovaly jednotlivé fáze.

Výraz (1) představuje účelovou funkci modelu, ve které se minimalizuje celkový součet maximálních mezičasů. Výraz (2) reprezentuje podmínku, která zabezpečuje, že každá fáze proběhne právě jednou. Podmínka (3) zabezpečuje, že kolikrát daná fáze začne, tolikrát i skončí a podmínka (4) zabezpečuje, že se v řešení nebudou vyskytovat podcykly. Výraz (5) představuje obligatorní podmínky modelu.

2. APLIKACE POPSANÝCH METOD NA REÁLNÉM PROBLÉMU

Výše popsané teoretické aparáty budou nyní použity k určení pořadí fází na dvou reálných světelně řízených křižovatkách lokalizovaných ve městě Ostrava. Jedná se o křižovatky ulic Bohumínská x Těšínská a Rudná x Lidická. Pomocí metod barvení grafů popsaných v minulém článku bylo zjištěno, že proudy křižovatky Bohumínská x Těšínská lze rozdělit do nejméně 3 fází a proudy křižovatky Rudná x Lidická do nejméně 4 fází. Celkově lze říci, že drtivá většina křižovatek obsahuje právě tyto dva počty fází. Nejjednodušší křižovatky mohou obsahovat pouze dvě fáze. Takovýchto křižovatek však není mnoho a

navíc u dvoufázového řízení není potřeba určovat pořadí fází, neboť při cyklickém opakování existuje pouze jediná možnost pořadí fází a to střídavá posloupnost F1 – F2 – F1 – F2. Naopak křižovatky, které by obsahovaly 5 nebo více fází autorovi článku nejsou známy. V praxi se sice používá vícefázové řízení, kdy složité křižovatky mohou obsahovat i 10 fází, nicméně bavíme-li se o minimálním potřebném počtu fází, je toto číslo obvykle rovno hodnotám uvedeným výše.

2.1 Aplikace heuristického algoritmu

V souladu s postupem uvedeným v kapitole 1.1 bude nyní určeno pořadí fází pro výše uvedené křižovatky. Nejprve bude řešena křižovatka Bohumínská x Těšínská. Jedná se o křižovatku, která obsahuje pouze 5 proudů, což je ovšem vhodné z hlediska demonstrace řešení. Jak již bylo uvedeno výše, heuristický algoritmus vyžaduje vytvoření dílčích matic mezičasů, což je u rozsáhlejších křižovatek prostorově náročné a neúměrně by zvýšilo rozsah článku. Proto bude kompletní postup prezentován pouze na této křižovatce, zatímco u křižovatky Rudná x Lidická, která obsahuje 13 proudů bude prezentován pouze výsledek.

2.1.1 Aplikace heuristického algoritmu na křižovatce Bohumínská x Těšínská

Při vyhledávání optimálního pořadí fází se vyjde z matice mezičasů řešené křižovatky. Matice mezičasů křižovatky ulic Bohumínská x Těšínská je prezentovaná Tab. 1. Tato matice slouží k sestavení dílčích matic mezičasů, ze kterých jsou následně vybírány maximální mezičasy.

Tab. 1 – Matice mezičasů křižovatky Bohumínská x Těšínská

	VA	VB	VC	VD	VE
VA			4	6	
VB			5	5	
VC	7	4			
VD		3	4		7
VE				3	

Zdroj: Ostravské komunikace

Nyní je k dispozici potřebný podklad k řešení a je možno přistoupit k realizaci algoritmu. V prvním kroku je potřeba určit všechny možnosti pořadí fází, které mohou nastat. Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly 2, proudy této křižovatky jsou rozděleny do třech fází s následujícím přiřazením proudů do fází:

- fáze F1: VA, VB, VE
- fáze F2: VC, VE
- fáze F3: VA, VD

Pro třífázové řízení při cyklickém opakování fází existují dvě možné kombinace:

- F1 – F2 – F3 – F1
- F1 – F3 – F2 – F1

Nyní budou pro jednotlivé varianty sestaveny dílčí matice mezičasů pro přechody mezi fázemi. Pro úsporu místa jsou tyto matice prezentovány pomocí jedné tabulky. Jednotlivé dílčí matice se staví tak, že ve sloupci jsou uvedeny pouze proudy z fáze, která končí a v řádku jsou uvedeny pouze proudy z fáze, která začíná. V případě první matice končí fáze F1 obsahující proudy VA, VB, VE a začíná fáze F2 obsahující proudy VC, VE. U kolizních proudů se následně doplní příslušné mezičasy mezi kolizními proudy, které jsou obsaženy ve výchozí matici mezičasů. Tento postup se následně provede rovněž pro přechod mezi fázemi F2 - F3 a F3 - F1. Dílčí matice jsou nyní sestaveny a je možno vybrat maximální mezičasy. V první matici je maximální mezičas roven hodnotě 5 s, ve druhé 7 s a ve třetí rovněž 7 s. Nyní se provede součet těchto mezičasů. Výsledkem je hodnota 19 s. Dílčí matice, výběr maximálního mezičasu a jejich součet je uveden v Tab. 2.

Tab. 2 – Dílčí matice mezičasů včetně získaných výsledků

F1 » F2	VC	VE	F2 » F3	VA	VD	F3 » F1	VA	VB	VE
VA	4		VC	7	5	VA			
VB	5		VE		3	VD		3	7
VE									
Max. mezičas 5 s			Max. mezičas 7 s			Max. mezičas 7 s			
Součet maximálních mezičasů 19 s									

Zdroj: Autor

Shodný postup se provede pro všechny možné kombinace pořadí fází. Pro třífázové řízení tedy zbývá vyřešit již pouze jednu variantu a to pro pořadí fází F1 – F3 – F2 – F1. Dílčí matice mezičasů včetně výsledků jsou zobrazeny v Tab. 3.

Tab. 3 – Dílčí matice mezičasů včetně získaných výsledků

F1 » F3	VA	VD	F3 » F2	VC	VE	F2 » F1	VA	VB	VE
VA			VA	4		VC	7	4	
VB		6	VD	4	7	VE			
VE		3							
Max. mezičas 6 s			Max. mezičas 7 s			Max. mezičas 7 s			
Součet maximálních mezičasů 20 s									

Zdroj: Autor

Nyní jsou k dispozici součty maximálních mezičasů pro všechny možné kombinace pořadí fází. Jak je možno vidět v Tab. 2, pro pořadí fází F1 – F2 – F3 – F1 je součet maximálních mezičasů roven hodnotě 19 s. Pro kombinaci pořadí fází F1 – F3 – F2 – F1 je možno z Tab. 3 odečíst výsledek 20 s. Nyní se vybere pořadí fází s nejnižší hodnotou součtu a toto pořadí představuje optimální pořadí fází. V případě křižovatky Bohumínská x Těšínská je tedy optimální pořadí fází F1 – F2 – F3 – F1.

2.1.2 Aplikace heuristického algoritmu na křižovatce Rudná x Lidická

Při řešení úlohy se opět vyjde z matice mezičasů. Matice mezičasů pro křižovatku Rudná x Lidická je prezentovaná v Tab. 4.

Tab. 4 – Matice mezičasů křižovatky Rudná x Lidická

	VA	VB	VC	VD	VE	VF	SA	SD	KA	PA	PB	PD	PE
VA		5	7		9	3				4		8	
VB	5			4		5			3		4		7
VC	5			7	5				3		4	9	
VD		8	3		5	7			8	8		4	
VE	4		5	5					4		7		4
VF	8	6		5					8	9			4
SA										4			
SD									4			4	
KA		5	7	8	9	2		8		4	8		
PA	10			6		6	10		10				
PB		18	11		15				12				
PD	2		2	6				6					
PE		15			18	11							

Zdroj: Ostravské komunikace

Shodně s předchozím případem je potřeba v prvním kroku určit všechny možnosti pořadí fází, které mohou nastat. Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly 2, proudy této křižovatky jsou rozděleny do čtyř fází s následujícím přiřazením proudů do fází:

- fáze F1: VB, VC, SD, PA
- fáze F2: VE, VF, SA, PD
- fáze F3: SA, KA, PD, PE
- fáze F4: VA, VD, SA, SD, PB, PE

Pro čtyřfázové řízení při cyklickém opakování fází existuje šest možných kombinací:

- F1 – F2 – F3 – F4 – F1
- F1 – F2 – F4 – F3 – F1
- F1 – F3 – F2 – F4 – F1
- F1 – F3 – F4 – F2 – F1
- F1 – F4 – F3 – F2 – F1
- F1 – F4 – F2 – F3 – F1

Nyní budou pro jednotlivé varianty sestaveny dílčí matice mezičasů pro přechody mezi fázemi. Vzhledem k rozsáhlosti bude prezentována pouze matice pro první kombinaci pořadí fází (Tab. 5). Tato tabulka bude obsahovat rovněž výsledky. Pro ostatní kombinace budou prezentovány již pouze výsledky (Tab. 6).

Tab. 5 – Dílčí matice mezičasů včetně získaných výsledků

F1 » F2	VE	VF	SA	PD			F2 » F3	SA	KA	PD	PE
VB		5					VE		4		4
VC	5			9			VF		8		4
SD				4			SA				
PA		6	10				PD				
Max. mezičas 10 s						Max. mezičas 8 s					
F3 » F4	VA	VD	SA	SD	PB	PE	F4 » F1	VB	VC	SD	PA
SA							VA	5	7		4
KA		8		8	8		VD	8	3		8
PD	2	6		6			SA				4
PE							SD				
Max. mezičas 8 s						Max. mezičas 18 s					
						Součet maximálních mezičasů 44 s					

Zdroj: Autor

Tab. 6 – Výsledky všech možných variant

Pořadí fází	Max. mezičas u přechodu				Součet
	F1 – F2	F2 – F3	F3 – F4	F4 – F1	
F1 – F2 – F3 – F4 – F1	10	8	8	18	44 s
Pořadí fází	Max. mezičas u přechodu				Součet
	F1 – F2	F2 – F4	F4 – F3	F3 – F1	
F1 – F2 – F4 – F3 – F1	10	8	12	15	45 s
Pořadí fází	Max. mezičas u přechodu				Součet
	F1 – F3	F3 – F2	F2 – F4	F4 – F1	
F1 – F3 – F2 – F4 – F1	10	18	8	18	54 s
Pořadí fází	Max. mezičas u přechodu				Součet
	F1 – F3	F3 – F4	F4 – F2	F2 – F1	
F1 – F3 – F4 – F2 – F1	10	8	18	9	45 s
Pořadí fází	Max. mezičas u přechodu				Součet
	F1 – F4	F4 – F3	F3 – F2	F2 – F1	
F1 – F4 – F3 – F2 – F1	10	12	18	9	49 s
Pořadí fází	Max. mezičas u přechodu				Součet
	F1 – F4	F4 – F2	F2 – F3	F3 – F1	
F1 – F4 – F2 – F3 – F1	10	18	8	15	51 s
Nejnižší hodnota mezičasů 44 s u pořadí F1 – F2 – F3 – F4 – F1					

Zdroj: Autor

Jak je možno vidět v Tab. 6, nejnižší hodnota součtu maximálních mezičasů je u první varianty pořadí fází, tedy F1 – F2 – F3 – F4 – F1 s hodnotou 44 s.

2.2 Řešení pomocí matematického modelu

Vzhledem k rozsáhlosti řešeného matematického modelu by bylo velmi obtížné řešit jej ručně, proto je zapotřební využít výpočetní techniky. Pro vyřešení matematického modelu uvedeného v kapitole 1.2 byl využit optimalizační software Xpress-IVE. Matematický model včetně vstupních dat byl sestaven do podoby, kterou vyžaduje tento optimalizační software, zápis byl následně odladěn, aby mohly být odstraněny případné chyby v zápisu a následoval optimalizační výpočet. Na základě výpočtu byl získán výstup, který je uveden v Tab. 7. Tabulka obsahuje výsledky pro obě řešené křižovatky.

Tab. 7 – Výstupy z programu Xpress-IVE

Křižovatka Bohumínská x Těšínská	
Vybrané pořadí fází	Minimální součet mezičasů
F1 – F2 – F3 – F1	19 s
Křižovatka Rudná x Lidická	
Vybrané pořadí fází	Minimální součet mezičasů
F1 – F2 – F3 – F4 – F1	44 s

Zdroj: Autor

Jak je možno vidět v Tab. 7, u obou křižovatek byla vybrána první kombinace fází, přičemž v prvním případě činí minimální hodnota součtu maximálních mezičasů 19 s. a ve druhé 44 s.

ZÁVĚR

Při porovnání výsledků získaných pomocí heuristického algoritmu a matematického modelu je možno vidět, že výsledky jsou v obou případech stejné a to jak u pořadí fází, tak i u hodnot součtů mezičasů. Je tedy možno říci, že obě metody jsou svou kvalitou srovnatelné. Výhodou heuristického algoritmu je jeho jednoduchost a také fakt, že řešitel se obejde bez výpočetní techniky. Nevýhodou je ovšem časová náročnost řešení, která u složitějších křižovatek může dosahovat i desítky minut. Řešení této úlohy pomocí matematického modelu je naopak velmi rychlé, neboť samotný výpočet trvá desetiny vteřiny. K tomuto času je ale potřeba přičíst i dobu nutnou k zápisu vstupních údajů a samotného modelu do elektronické podoby. Řešitel navíc musí mít k dispozici výpočetní techniku vybavenou příslušným optimalizačním software.

*Článek byl zpracován s podporou grantu Fakulty strojní VŠB-TU Ostrava č. SP2011/129
Výzkum v oblasti modelování pro podporu řízení dopravy ve městech.*

POUŽITÁ LITERATURA

- (1) ČERNÁ, A; ČERNÝ, J. *Teorie řízení a rozhodování v dopravních systémech*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2004. 150 s. ISBN 80-86530-15-9.
- (2) RUSEK, M.. Aplikace metod barvení grafů pro určení minimálního počtu fází světelně řízených křižovatek. *Perner's Contact*, 2011, roč. 6, č. 1, s. 275 - 285, ISSN 1801-674X.

- (3) TOLASZ, J., Verifikace optimality navrženého způsobu řízení soustavy světelných křižovatek lineárním matematickým modelem. Diplomová práce. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická universita Ostrava. Fakulta strojní. Institut dopravy, 2008. 69 s.
- (4) LACKO, T., Navrhovanie signálneho plánu križovatky pomocou IP solveru. Bakalárska práca. Žilina: Žilinská universita v Žiline. Fakulta riadenia a informatiky. Katedra dopravných sietí, 2010. 65 s.