

VYUŽITÍ MAX-PLUS ALGEBRY PŘI KOORDINACI 2 SVĚTELNÝCH KŘÍŽOVATEK

USING MAX-PLUS ALGEBRA IN 2 SIGNALIZED CROSSROADS COORDINATION

Michal Turek¹

Anotace: Příspěvek se zabývá možností navrhovat koordinaci světelných křižovatek v Max-plus algebře. V první části příspěvku je definován problém a uveden teoretický rozbor Max-plus algebry. V další části příspěvku je navržena koordinace světelných křižovatek na základě rovnic Max-plus algebry. V závěrečné části je provedeno vyhodnocení.

Klíčová slova: Koordinace, světelné řízení, křižovatka, Max-plus algebra, Scilab.

Summary: The paper deals with the possibility of signalized crossroads coordination using Max-plus algebra. In the first part the problem is defined and a theoretical analysis of Max-plus algebra is given. In the next part of the paper the signalized crossroads coordination based on Max-plus algebra equations is developed. In the final part an evaluation is presented.

Key words: Coordination, Signalized control, Crossroads, Max-plus algebra, Scilab.

ÚVOD

Princip světelného řízení křižovatek umožňuje současné jízdy pouze nekolizním, resp. podmíněně kolizním dopravním proudům. Zajišťuje srozumitelné zobrazování návěští včetně srozumitelného zobrazování změny návěští, aby byla zajištěna bezpečnost provozu, a efektivně přiřazuje doby zelené jednotlivým dopravním proudům, aby byla zajištěna plynulost provozu. Uvedený princip lze využít u křižovatek, které se nacházejí ve velkých vzdálenostech. V případě, že se křižovatky nacházejí v malých vzdálenostech, je nutné základní princip světelného řízení rozšířit o koordinaci křižovatek, protože vstupy dopravních proudů do křižovatek jsou navzájem ovlivňovány. Rozšířením principu světelného řízení o koordinaci dojde k tomu, že koordinované dopravní proudy získají na sousedních křižovatkách shodné doby zelené v odpovídajících časových úsecích. Tím bude zajištěna plynulost provozu na sousedních křižovatkách a pozitivní psychologický vliv na řidiče, kteří budou moci vstoupit do sousedních křižovatek bez omezení rychlosti. Nekoordinovaným dopravním proudům zůstane přiřazována doba zelené obdobně jako u izolovaných křižovatek. Některé začátky a konce zelených pro nekoordinované dopravní proudy budou ovlivňovány dobami zelené koordinovaných dopravních proudů, ale nesmí dojít k tomu, že nabízená doba zelené pro nekoordinovaný dopravní proud bude nižší než požadovaná doba zelené.

¹ Ing. Michal Turek, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: +420 721 846 776, E-mail: michal.turek@atlas.cz

1. MOTIVACE

K návrhu koordinace křižovatek lze v současné době použít především technické podmínky TP 81, v nichž je uveden grafický a numerický způsob koordinace křižovatek (1). Dále je možné použít matematický model pro tvorbu signálních plánů soustavy světelně řízených křižovatek, který vychází z matematického modelu pro řízení dopravy na křižovatce vytvořeného řešitelským kolektivem ve Výzkumném ústavu dopravním v Žilině, Černý a kolektiv (2).

Kromě přístupů, které se v současné době pro návrh světelného řízení se zajištěním koordinace křižovatek používají, je vhodné z hlediska efektivity hledat perspektivnější způsoby řešení koordinace křižovatek. Perspektivní řešení koordinace křižovatek představují obsáhlé matematické modely, které ve spojení s výpočtovou silou software řešícího úlohy Max-plus algebry umožňují efektivně řídit koordinované a nekoordinované dopravní proudy na světelně řízených křižovatkách.

2. MAX-PLUS ALGEBRA

Max-plus algebra se objevila jako vhodný matematický aparát pro popis chování diskrétních dynamických systémů v roce 1950. K hledání optimálních řešení využívá Max-plus algebra specifické operace vhodné pro modelování a analýzu synchronizovaných systémů. Představuje matematický nástroj, v němž se aritmetická operace sčítání nahrazuje určováním maxima a aritmetická operace násobení se nahrazuje sčítáním. Jedná se tedy o originální aplikace nelineární algebry při řešení synchronizačních problémů a nový přístup k řešení některých optimalizačních problémů, který může být použit pro návrh světelného řízení křižovatek a jejich koordinaci. Podrobnější informace o Max-plus algebře čtenář nalezne v literatuře (3), (4).

3. KOORDINACE KŘÍŽOVATEK V MAX-PLUS ALGEBŘE

Návrh koordinace křižovatek byl zpracován pro křižovatku Vápenice-Olomoucká-Svatoplukova a křižovatku Svatooplukova-Újezd v Prostějově (Obr. 1) s ohledem na dvě zásady (1):

- délky cyklu na sousedních křižovatkách mají být shodné,
- koordinované dopravní proudy mají do křižovatek vstupovat ve fázích, které následují bezprostředně po sobě (1).

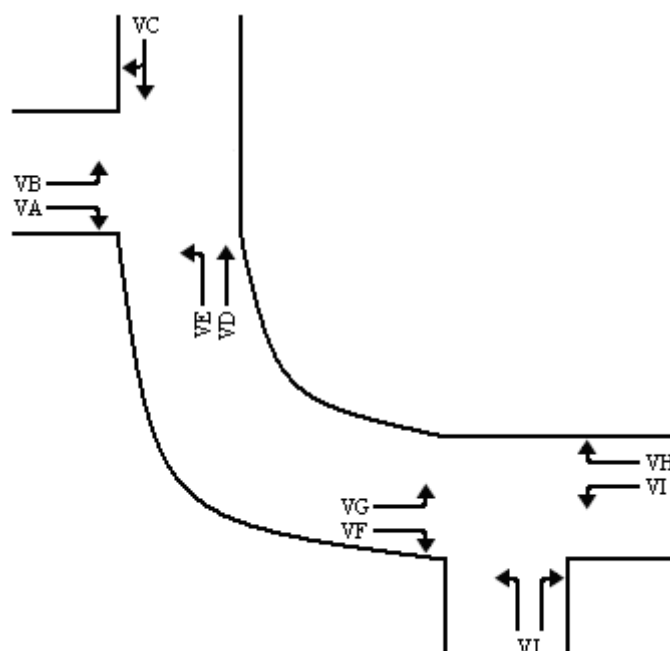


Zdroj: www.mapy.cz

Obr. 1 - Letecký pohled na koordinované křižovatky v Prostějově

3.1 Sestavení matematického modelu koordinace dvou křižovatek

Při modelování koordinace křižovatek budeme vycházet ze schématu koordinovaných křižovatek s vyznačenými vozidlovými proudy (Obr. 2) a veličin, které v rovnicích Max-plus algebry vystupují.



Zdroj: Autor

Obr. 2 - Schéma koordinovaných křižovatek

V_i - vozidlový proud i , $i \in \{A, B, \dots, L\}$,
 $z_i(k)$ - začátek zelené pro i -tý vozidlový proud v k -té fázi (proměnná hodnota),
 $i \in \{A, B, \dots, L\}$,
 $t_i(k)$ - doba zelené pro i -tý vozidlový proud vstupující v k -té fázi (konstantní hodnota),
 $i \in \{A, B, \dots, L\}$,
 t - doba průjezdu mezi křižovatkami (konstantní hodnota),
 m_{ij} - mezičas mezi koncem vstupu i -tého proudu do křižovatky a začátkem vstupu j -tého proudu do křižovatky (konstantní hodnota), $i \in \{A, B, \dots, L\}, j \in \{A, B, \dots, L\}$.

V rámci modelování koordinace křižovatek byly úpravou systému rovnic (1) - (10) sestaveny rovnice Max-plus algebry (11) - (20).

$$z_A(k+1) = \max(z_C(k) + t_C(k) + m_{CA}, z_I(k) + t_I(k) + m_{IJ}) \quad (1)$$

$$z_B(k+1) = \max(z_C(k) + t_C(k) + m_{CB}, -\infty) \quad (2)$$

$$z_J(k+1) = \max(z_C(k) + t_C(k) + m_{CA}, z_I(k) + t_I(k) + m_{IJ}) \quad (3)$$

$$z_D(k+1) = \max(z_B(k) + t_B(k) + m_{BD}, -\infty) \quad (4)$$

$$z_E(k+1) = \max(z_B(k) + t_B(k) + m_{BE}, z_J(k) + t) \quad (5)$$

$$z_F(k+1) = \max(z_A(k) + t, -\infty) \quad (6)$$

$$z_G(k+1) = \max(z_J(k) + t_J(k) + m_{JG}, -\infty) \quad (7)$$

$$z_H(k+1) = \max(z_J(k) + t_J(k) + m_{JH}, -\infty) \quad (8)$$

$$z_C(k+1) = \max(z_E(k) + t_E(k) + m_{EC}, -\infty) \quad (9)$$

$$z_I(k+1) = \max(z_F(k) + t_F(k) + m_{FI}, z_G(k) + t_G(k) + m_{GI}) \quad (10)$$

$$z_A(k+1) = (z_C(k) \otimes t_C(k) \otimes m_{CA}) \oplus (z_I(k) \otimes t_I(k) \otimes m_{IJ}) \quad (11)$$

$$z_B(k+1) = (z_C(k) \otimes t_C(k) \otimes m_{CB}) \oplus (-\infty) \quad (12)$$

$$z_J(k+1) = (z_C(k) \otimes t_C(k) \otimes m_{CA}) \oplus (z_I(k) \otimes t_I(k) \otimes m_{IJ}) \quad (13)$$

$$z_D(k+1) = (z_B(k) \otimes t_B(k) \otimes m_{BD}) \oplus (-\infty) \quad (14)$$

$$z_E(k+1) = (z_B(k) \otimes t_B(k) \otimes m_{BE}) \oplus (z_J(k) \otimes t) \quad (15)$$

$$z_F(k+1) = (z_A(k) \otimes t) \oplus (-\infty) \quad (16)$$

$$z_G(k+1) = (z_J(k) \otimes t_J(k) \otimes m_{JG}) \oplus (-\infty) \quad (17)$$

$$z_H(k+1) = (z_J(k) \otimes t_J(k) \otimes m_{JH}) \oplus (-\infty) \quad (18)$$

$$z_C(k+1) = (z_E(k) + t_E(k) \otimes m_{EC}) \oplus (-\infty) \quad (19)$$

$$z_I(k+1) = (z_F(k) \otimes t_F(k) \otimes m_{FI}) \oplus (z_G(k) \otimes t_G(k) \otimes m_{GI}) \quad (20)$$

Otevřena zůstává volba počátečních začátků zelených pro vozidlové proudy. Ke stanovení počátečních začátků zelených na koordinovaných křižovatkách byla využita hodnota vlastního vektoru λ matice A (23) zjištěná vztahem (21).

$$A \otimes z(k) = \lambda \otimes z(k) \tag{21}$$

Následné začátky zelených na koordinovaných křižovatkách byly stanoveny na základě vztahu (22).

$$z(k+1) = A \otimes z(k) \tag{22}$$

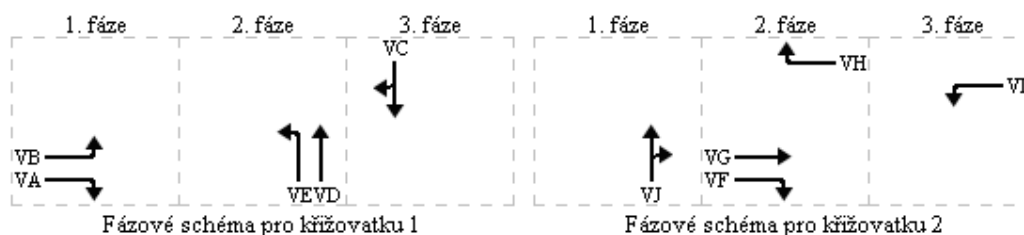
3.2 Analýza vstupních podkladů

Před zajištěním koordinace křižovatek prostřednictvím Max-plus algebry byla provedena analýza vstupních podkladů. Do každé křižovatky vstupuje 5 vozidlových proudů, hodnoty mezičasů pro dvojice kolizních proudů na křižovatkách jsou uvedeny v Tab. 1 a fázová schémata, která byla stanovena s ohledem na princip koordinace, jsou uvedena na Obr. 3.

Tab. 1 - Stanovené mezičasy

Vyklizuje	Najíždí					Vyklizuje	Najíždí				
	VA	VB	VC	VD	VE		VF	VG	VH	VI	VJ
VA	-	-	3	-	-	VF	-	-	-	2	-
VB	-	-	3	2	2	VG	-	-	-	3	2
VC	3	3	-	-	2	VH	-	-	-	-	2
VD	-	2	-	-	-	VI	2	3	-	-	3
VE	-	2	2	-	-	VJ	-	2	2	3	-

Zdroj: Autor



Zdroj: Autor

Obr. 3 - Fázová schémata

Doby zelených (Tab. 3) byly stanoveny pro zvolenou délku cyklu 57 sekund podle vzorce (23) s ohledem na intenzity vozidel (Tab. 2) uvedené v dopravním průzkumu města Prostějova z roku 2006. Doba průjezdu mezi křižovatkami činí 9 sekund.

Tab. 2 - Intenzity vozidel

Označení vozidlového proudu	VA	VB	VC	VD	VE	VF	VG	VH	VI	VJ
Intenzity vozidel ve vozidlových proudech [jv.h ⁻¹]	707	212	636	353	707	717	318	390	338	717

Zdroj: Autor

$$t_i(k) = \frac{C}{S} \cdot I_i \text{ [s]} \quad (23)$$

$t_i(k)$ - požadovaná doba zelené pro i -tý vozidlový proud v k -té fázi [s]

C - zvolená délka cyklu [s]

S - saturovaný tok 1900 [jv.h⁻¹]

I_i - intenzita vozidel v i -tém vozidlovém proudu [jv.h⁻¹]

Tab. 3 - Doby zelených

Označení vozidlového proudu	VA	VB	VC	VD	VE	VF	VG	VH	VI	VJ
Požadované doby zelené pro vozidlové proudy [s]	22	7	20	12	23	22	9	12	11	23

Zdroj: Autor

3.3 Stanovení začátků zelených

V matematickém software Scilab (5) byla pro matici A v (24) sestavenou na základě rovnic Max-plus algebry (11) - (20) vypočtena hodnota vlastního čísla a vlastního vektoru. Hodnota vlastního čísla umožňuje vymezení začátků zelených, které se po určité době opakují. Hodnota vlastního vektoru umožňuje definovat začátky zelených, po kterých nastane období, které se opakuje.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} VA & VB & VJ & VD & VE & VF & VG & VH & VC & VI \end{matrix} \\ \begin{matrix} VA \\ VB \\ VJ \\ VD \\ VE \\ VF \\ VG \\ VH \\ VC \\ VI \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 23 & 14 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 23 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 23 & 14 \\ -\infty & 9 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 9 & 9 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 9 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 25 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 25 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 25 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 24 & 12 & -\infty & -\infty & -\infty \end{array} \right) \end{matrix} \quad (24)$$

V následující části budou zjišťovány začátky zelených pro vozidlové proudy.

3.3.1 Zjišťování hodnot vlastního čísla a vlastního vektoru

V software Scilab se nachází pro stanovení hodnoty vlastního čísla a vlastního vektoru příkaz $[l, v, d] = \text{maxplusmaxalgol}(A)$, přičemž prvek l reprezentuje vlastní číslo matice A , v reprezentuje vlastní vektor matice A a d reprezentuje přirozené číslo, které představuje délku kritického cyklu matice A .

Nyní budou uvedeny příkazy, kterými byly v software Scilab zjišťovány hodnoty vlastního čísla a vlastního vektoru.

```
-->s=maxplusscg(A)
s = F
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
d = 3.
v = 86, 86, 86, 76, 76, 76, 92, 92, 82, 85.
l = 19.
```

3.3.2 Zjišťování začátků zelených

Vypočtenému počtu zelených, které se po určité době opakují, byly přiřazeny konkrétní hodnoty. V software Scilab se nachází pro stanovení následných začátků zelených v rámci vlastního čísla příkaz $[X] = \text{maxplussys}(A, x0, p)$, přičemž prvek A reprezentuje matici A , $x0$ reprezentuje počáteční vektor a p reprezentuje vlastní číslo.

Nyní budou uvedeny příkazy, kterými byly v software Scilab definovány začátky zelených.

```
-->x0=[86;86;86;76;76;76;92;92;82;85];
-->p=19;
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

Zjištěné začátky zelených pro vozidlové proudy přeepsané do časových údajů (Tab. 4) nabízejí řešiteli pouze výchozí řešení, při kterém jsou do křižovatek umožněny současné vjezdy všem vozidlovým proudům. Proto byly začátky zelených, které přísluší jednotlivým fázím v Tab. 4 ponechány, a začátky zelených, které jednotlivým fázím nepřísluší, byly v Tab. 4 zastíněny.

Tab. 4 - Zjištěné začátky zelených

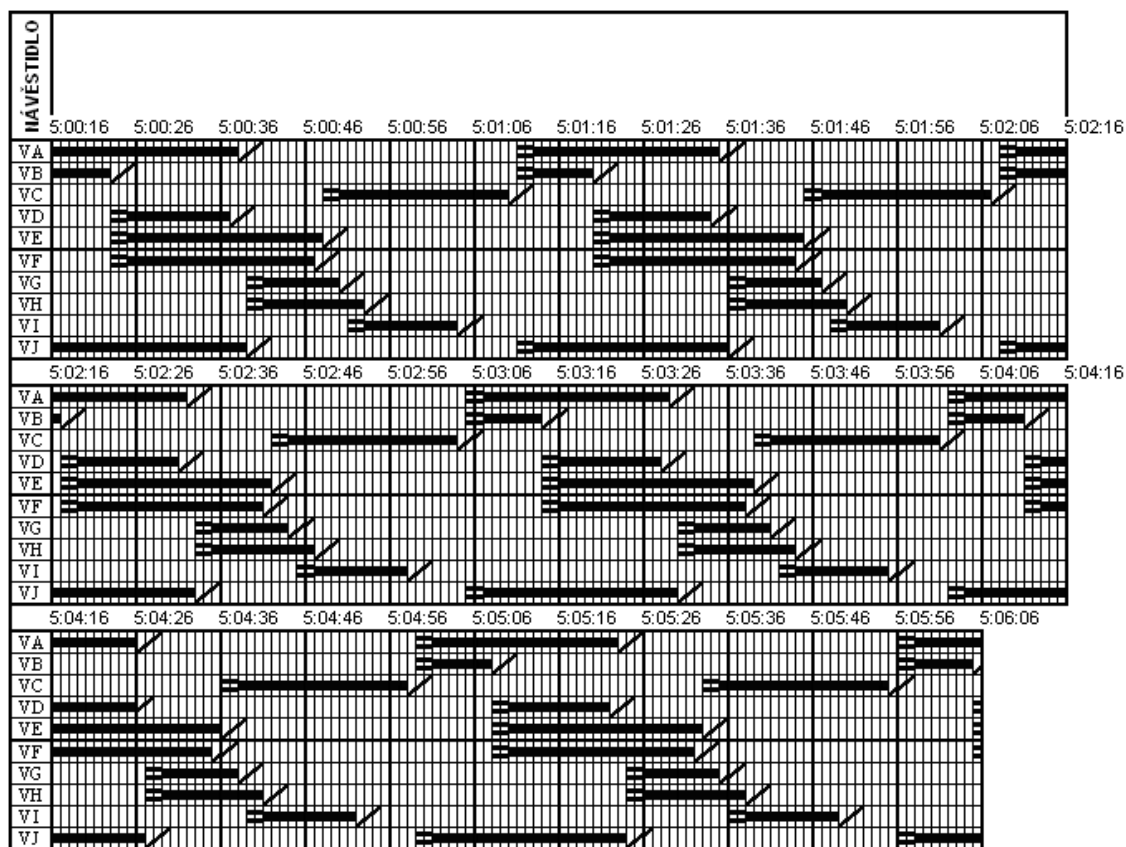
Začátky zelených v jednotlivých fázích										
VA	5:00:16	5:00:35	5:00:54	5:01:13	5:01:32	5:01:51	5:02:10	5:02:29	5:02:48	5:03:07
VB	5:00:16	5:00:35	5:00:54	5:01:13	5:01:32	5:01:51	5:02:10	5:02:29	5:02:48	5:03:07
VJ	5:00:16	5:00:35	5:00:54	5:01:13	5:01:32	5:01:51	5:02:10	5:02:29	5:02:48	5:03:07
VD	5:00:06	5:00:25	5:00:44	5:01:03	5:01:22	5:01:41	5:02:00	5:02:19	5:02:38	5:02:57
VE	5:00:06	5:00:25	5:00:44	5:01:03	5:01:22	5:01:41	5:02:00	5:02:19	5:02:38	5:02:57
VF	5:00:06	5:00:25	5:00:44	5:01:03	5:01:22	5:01:41	5:02:00	5:02:19	5:02:38	5:02:57
VG	5:00:22	5:00:41	5:01:00	5:01:19	5:01:38	5:01:57	5:02:16	5:02:35	5:02:54	5:03:13
VH	5:00:22	5:00:41	5:01:00	5:01:19	5:01:38	5:01:57	5:02:16	5:02:35	5:02:54	5:03:13
VC	5:00:12	5:00:31	5:00:50	5:01:09	5:01:28	5:01:47	5:02:06	5:02:25	5:02:44	5:03:03
VI	5:00:15	5:00:34	5:00:53	5:01:12	5:01:31	5:01:50	5:02:09	5:02:28	5:02:47	5:03:06
VA	5:03:26	5:03:45	5:04:04	5:04:23	5:04:42	5:05:01	5:05:20	5:05:39	5:05:58	
VB	5:03:26	5:03:45	5:04:04	5:04:23	5:04:42	5:05:01	5:05:20	5:05:39	5:05:58	

VJ	5:03:26	5:03:45	5:04:04	5:04:23	5:04:42	5:05:01	5:05:20	5:05:39	5:05:58
VD	5:03:16	5:03:35	5:03:54	5:04:13	5:04:32	5:04:51	5:05:10	5:05:29	5:05:48
VE	5:03:16	5:03:35	5:03:54	5:04:13	5:04:32	5:04:51	5:05:10	5:05:29	5:05:48
VF	5:03:16	5:03:35	5:03:54	5:04:13	5:04:32	5:04:51	5:05:10	5:05:29	5:05:48
VG	5:03:32	5:03:51	5:04:10	5:04:29	5:04:48	5:05:07	5:05:26	5:05:45	5:06:04
VH	5:03:32	5:03:51	5:04:10	5:04:29	5:04:48	5:05:07	5:05:26	5:05:45	5:06:04
VC	5:03:22	5:03:41	5:04:00	5:04:19	5:04:38	5:04:57	5:05:16	5:05:35	5:05:54
VI	5:03:25	5:03:44	5:04:03	5:04:22	5:04:41	5:05:00	5:05:19	5:05:38	5:05:57

Zdroj: Autor

ZÁVĚR

V příspěvku bylo prezentováno zajištění koordinace křižovatek prostřednictvím Max-plus algebry, která představuje perspektivní přístup k řešení některých optimalizačních problémů, protože umožňuje prostřednictvím poměrně jednoduchých lineárních rovnic v této algebře řešit nelineární optimalizační úlohy. Uvedený přístup byl aplikován v podmínkách soustavy křižovatek Vápenice-Olomoucká-Svatoplukova a Svatooplukova-Újezd v Prostějově, na které byly s ohledem na vlastní číslo a vlastní vektor stanoveny začátky zelených pro vozidlové proudy, které se po určité době opakují. Na základě definovaných začátků zelených byly pro koordinované křižovatky sestaveny signální plány (Obr. 4).



Zdroj: Autor

Obr. 4 - Signální plány pro koordinované křižovatky

*Článek byl zpracován s podporou grantu Fakulty strojní VŠB - TU Ostrava č. SP2011/129
Výzkum v oblasti modelování pro podporu řízení dopravy ve městech.*

POUŽITÁ LITERATURA

- (1) Technické podmínky TP 81. *Navrhování světelných signalizačních zařízení pro řízení provozu na pozemních komunikacích*. Brno: CDV, Ministerstvo dopravy České republiky, 2006.
- (2) ČERNÝ, J., KLUVÁNEK, P. *Základy matematickej teórie dopravy*. Bratislava: VEDA, 1991. 279 s. ISBN 8022400998.
- (3) ANDERSEN, M. H. *Max-plus algebra: properties and applications*. 2002.
- (4) BACELLI, F., COHEN, G., OLSDER, G. J., QUADRAT, J. P. *Synchronization and Linearity*. 2001.
- (5) *Scilab*. Dostupné z <<http://www.scilab.org>>.