

## ČASOVÁ KOORDINACE VYBRANÝCH LINEK MHD PROSTĚJOV

### TIME COORDINATION OF SELECTED PUBLIC TRANSPORT LINES IN PROSTĚJOV

Richard Turek<sup>1</sup>

---

*Anotace:* Příspěvek se zabývá modelováním synchronizace odjezdů spojů z přestupních zastávek pomocí Max-plus algebry ve Scilabu. Problém přestupu cestujících je formulován pomocí matematického aparátu Max-plus algebry. Následuje charakteristika MHD Prostějov a seznámení s operacemi Max-plus algebry, kterých je využito při modelování synchronizace linek MHD Prostějov.

*Klíčová slova:* Synchronizace, přestupní zastávka, modelování, Max-plus algebra, Scilab.

*Summary:* The paper deals with modelling of the synchronization of departures from the transfer stations using Max-plus algebra in Scilab. The problem of passengers' transfer is formulated using mathematical Max-plus algebra. In the next part of the paper there is a characteristic of Prostějov public transport and an introduction to Max-plus algebra operations that are used for modelling of the synchronization of public transport lines in Prostějov.

*Key words:* Synchronization, interchange stops, modelling, Max-plus algebra, Scilab.

## ÚVOD

Řešení hromadné osobní dopravy představuje komplex dílčích problémů, které musí být řešeny společně. Klíčovým problémem každého systému MHD je snaha o maximální snížení ekonomické ztrátovosti. S uvedeným problémem velice úzce souvisí ekonomická efektivita rozsahu dopravní sítě MHD především ve vztahu k počtu nasazených vozidel a provozní délce jednotlivých linek, který by korespondoval s požadavky cestující veřejnosti. Jedním z nežádoucích důsledků takovéhoto do značné míry protichůdných požadavků může být ztráta možnosti vhodných přestupů mezi spoji některých linek na významných zastávkách sítě.

Existence přímého spojení znamená výhodu pro cestujícího spočívající v tom, že nemusí při svých cestách přestupovat. V důsledku racionalizace však často dochází ke snížení počtu linek, což pro cestující veřejnost představuje zvýšení potřeby přestupovat v některých relacích. Relace bez možnosti přímého spojení jsou charakteristické nižšími intenzitami přepravního proudu v daných relacích a vyšší mírou souběhu linek.

---

<sup>1</sup> Ing. Richard Turek, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, Tel.: +420 723 205 261, E-mail: [richardturek@seznam.cz](mailto:richardturek@seznam.cz)

## 1. MOTIVACE

K řešení problému časové koordinace spojů v přestupních uzlech je možno přistoupit různými způsoby. Nejčastěji je využíván tzv. zkušenostní přístup, kdy pověření zaměstnanci dopravců zajišťují možnosti přestupu na vybraných přestupních zastávkách zpravidla na základě svých logických úvah vyplývajících z historicky vzniklých přestupních vazeb.

Pokročilejší přístup v dopravní praxi v tuzemsku i v zahraničí představují heuristické metody, mezi které patří metoda pravidelných  $n$ -segmentů na kružnici známá též jako tzv. úloha o žilinských  $n$ -úhelnících a metody založené na lineárním programování, v rámci kterých byl vytvořen matematický model časové koordinace spojů sestavený řešitelským kolektivem Výzkumného ústavu dopravního v Žilině, Černý a kolektiv (1).

S ohledem na výpočtovou sílu solverů a matematického aparátu Max-plus algebry se nabízí možnost rozšíření pokročilejších přístupů prostřednictvím tvorby robustních matematických modelů pro synchronizaci technologických omezení dopravců i požadavků cestující veřejnosti.

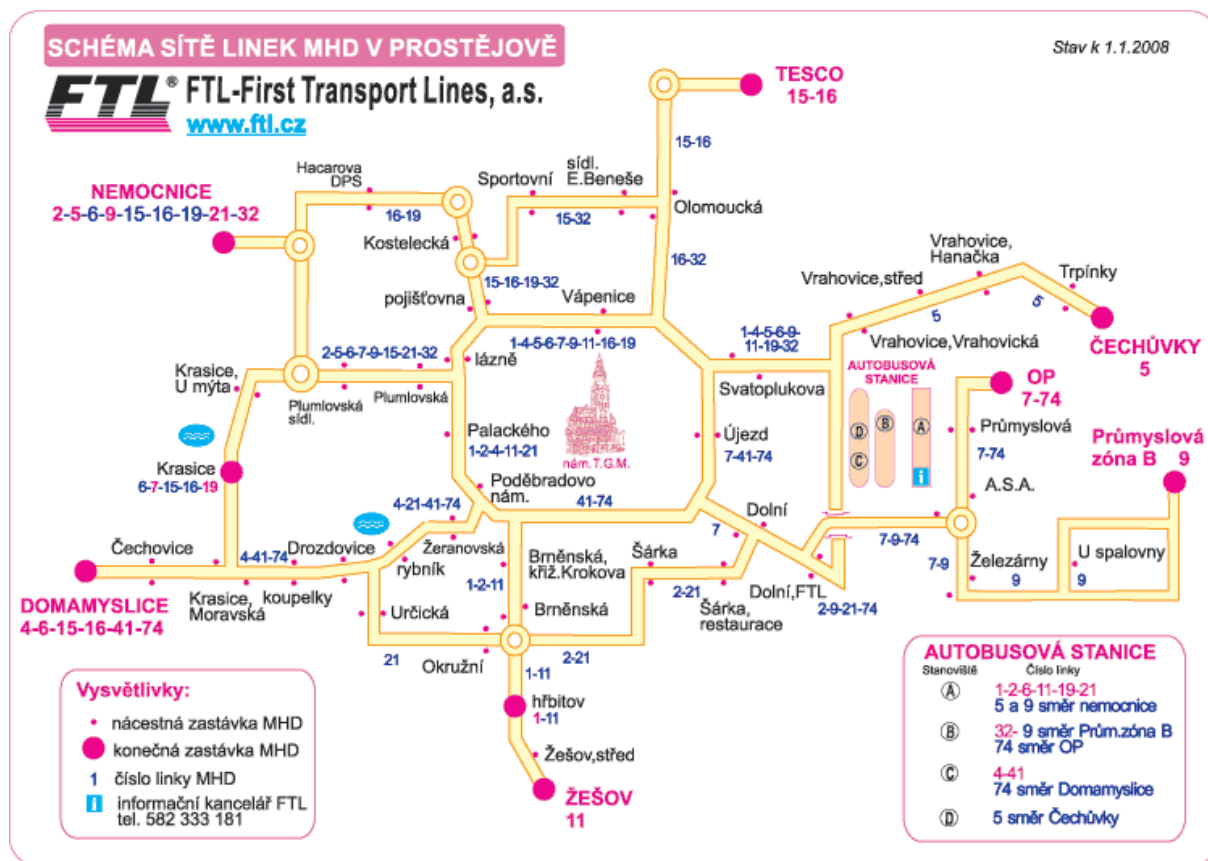
## 2. MAX-PLUS ALGEBRA

Většina problémů v operačním výzkumu zahrnuje hledání optima. Max-plus algebra využívá při formulaci rovnic specifické operace a proto je zajímavým kandidátem pro matematický popis chování diskretních dynamických systémů.

Max-plus algebra představuje matematický aparát, ve kterém jsou klasické aritmetické operace sčítání a násobení nahrazeny následujícími operacemi  $a \oplus b = \max(a, b)$  a  $a \otimes b = a + b$ . Uvedený matematický přístup nabízí netradiční způsob vhodný pro modelování systémů diskretních událostí DES (Discrete Event Systems) a optimalizaci problémů ve výrobě a dopravě. Navíc se ukazuje silná podobnost s klasickou lineární algebrou, což umožňuje například analogické řešení soustav lineárních rovnic a efektivní výpočet vlastního čísla a vlastních vektorů (2), (3) a (4).

## 3. SYNCHRONIZACE VYBRANÝCH LINEK V PODMÍNKÁCH MHD PROSTĚJOV

Území města je obsluhováno prostřednictvím 15 linek a jedné linky komerční na které neplatí tarif MHD. Schéma sítě linek MHD Prostějov je znázorněno na obrázku 1.



Zdroj: FTL

Obr. 1 - Schéma sítě linek MHD v Prostějově

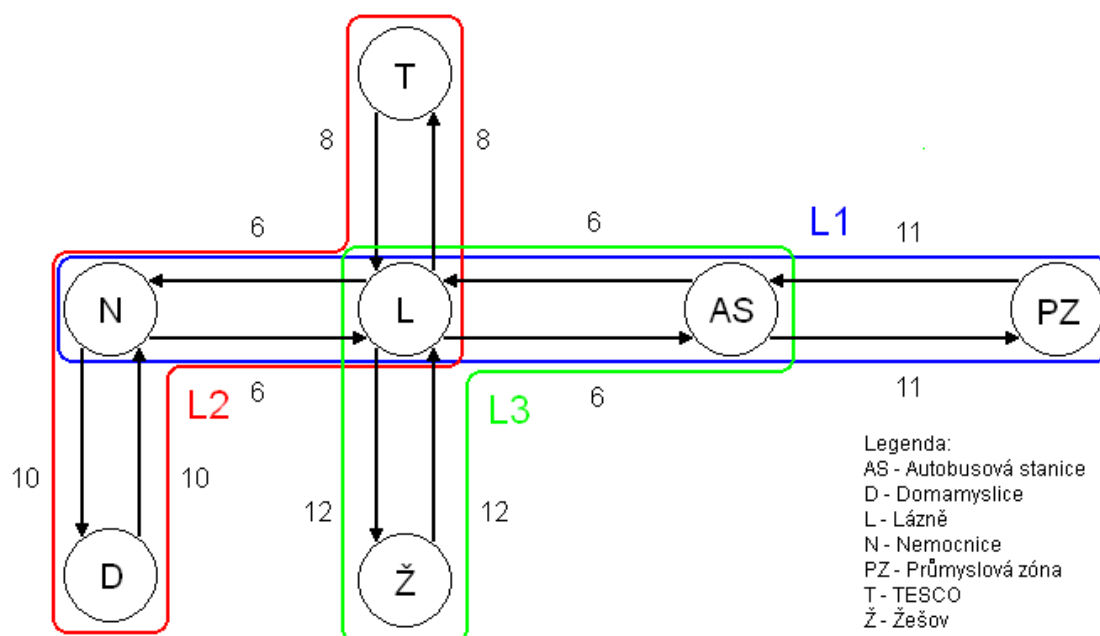
Městskou hromadnou dopravu ve městě Prostějov zajišťuje 22 autobusů. Vozidlový park tvoří standardní autobusy Karosa a Sor s pohonem na zemní plyn. Průměrné stáří vozidlového parku činí cca 8 let. Autobusy obsluhují spoje linek MHD podle předem stanovených turnusů. V jednotlivých turnusech jsou pro každé vozidlo definovány činnosti (přistavení, spoje, bezpečnostní přestávky, odstavení), zastávky, časové údaje, rychlost, ujetá vzdálenost atd. Autobusy v současné době nejsou přiřazeny určité lince, ale v průběhu dne obsluhují spoje různých linek, které na sebe navazují v konečných zastávkách. Některá vozidla navíc obsluhují dle rozpisu také spoje příměstských linek. Počet nasazených autobusů ve špičce činí 19, množství autobusů v sedle je 7. Intervaly na jednotlivých linkách jsou kromě komerční linky nepravidelné, ostatně jak je ve většině našich okresních měst obvyklé.

Současný stav MHD v Prostějově je charakteristický nepřiměřeně velkým počtem linek na větší okresní město, což přispívá k nepřehlednosti, zejména pro cestujícího, který MHD v Prostějově nevyužívá pravidelně.

V důsledku racionalizace by došlo ke snížení počtu autobusů a také linek. Výsledek studie činí 15 autobusů obsluhujících 10 linek (5), (6). Uvedené řešení představuje efektivní využití autobusů. Snížení počtu linek přispívá ke zprehlednění sítě MHD Prostějov a eliminaci souběhů linek. V navrženém řešení neobsluhují autobusy během dne spoje různých linek, ale každý autobus je přidělen jedné lince. Navržené řešení umožňuje synchronizaci provozu na třech linkách, včetně navazujících výhod vytvoření lepších podmínek pro koordinaci odjezdu spojů jednotlivých linek.

Pro obyvatele Krasic, severní části města a části průmyslové zóny představuje předkládané řešení zhoršení dostupnosti autobusové stanice a železniční stanice Prostějov hlavní nádraží v podobě absence přímého spojení. Ve výše uvedených relacích budou cestující nuceni více přestupovat, ve všech případech však půjde pouze o 1 přestup. V současné době je největší přestup realizován obousměrně mezi MHD, PAD a železniční dopravou a nejméně přestupů je realizováno v relaci mezi spoji MHD. Realizací navržených změn však vznikne vyšší potřeba přestupovat. V takovém případě bude nutné zabývat se časovou koordinací spojů na jednotlivých linkách na vytipovaných zastávkách.

V další části příspěvku bude pozornost věnována modelování jízdních řádů autobusových linek v dopravní síti MHD Prostějov, resp. stanovení časů odjezdů spojů synchronizovaných linek uvedených na obrázku 2. Jedná se o zajištění přestupu mezi linkami L1 a L2 a linkami L2 a L3 na zastávce Lázně.



Zdroj: Autor

Obr. 2 - Fragment dopravní sítě MHD Prostějov

### 3.1 Sestavení matematického modelu synchronizace linek MHD Prostějov

Modelování synchronizace linek MHD bylo vytvořeno rovnicemi Max-plus algebry pro každou zastávku tak, aby při každém odjezdu ze zastávek byly zohledněny příjezdy vozidel MHD ze sousedních zastávek.

Každá optimalizační metoda vyžaduje před vlastním řešením určitý objem vstupních údajů. Na přesnosti a správné struktuře vstupních dat je do značné míry závislá také kvalita výstupních údajů.

Před modelováním synchronizace linek MHD budou z důvodu srozumitelnosti popsány symboly, které budou dále používány.

$x_{ij}(k)$  -  $k$ -tý synchronizovaný odjezd z  $i$ -té zastávky směrem k  $j$ -té zastávce (proměnná veličina)  $i \in \{AS, D, \dots, Ž\}$ ,  $j \in \{AS, D, \dots, Ž\}$ ,

$t_{ij}$  - jízdní doba mezi  $i$ -tou a  $j$ -tou zastávkou (konstantní veličina)  $i \in \{AS, D, \dots, Ž\}$ ,  $j \in \{AS, D, \dots, Ž\}$ ,

$i_l(k)$  - interval na lince  $l$  při  $k$ -tém synchronizovaném odjezdu (konstantní veličina).

Systém následujících lineárních rovnic zajišťuje synchronizaci linek MHD

$$x_{AS-L}(k+1) = \max(x_{AS-L}(k) + i_3, x_{Z-L}(k) + t_{Z-AS}) \quad (1)$$

$$x_{D-N}(k+1) = \max(x_{D-N}(k) + i_2, x_{T-L}(k) + t_{T-D}) \quad (2)$$

$$x_{N-D}(k+1) = \max(x_{N-D}(k) + i_2, x_{PZ-AS}(k) + t_{PZ-N}, x_{T-L}(k) + t_{T-N}) \quad (3)$$

$$x_{N-L}(k+1) = \max(x_{D-N}(k) + t_{D-N}, x_{N-L}(k) + i_1, x_{PZ-AS}(k) + t_{PZ-N}) \quad (4)$$

$$x_{L-AS}(k+1) = \max(x_{L-AS}(k) + i_3, x_{T-L}(k) + t_{T-L}, x_{Z-L}(k) + t_{Z-L}) \quad (5)$$

$$x_{L-T}(k+1) = \max(x_{AS-L}(k) + t_{AS-L}, x_{D-N}(k) + t_{D-L}, x_{L-T}(k) + i_2) \quad (6)$$

$$x_{PZ-AS}(k+1) = \max(x_{N-L}(k) + t_{N-PZ}, x_{PZ-AS}(k) + i_1) \quad (7)$$

$$x_{T-L}(k+1) = \max(x_{D-N}(k) + t_{D-T}, x_{T-L}(k) + i_2) \quad (8)$$

$$x_{Z-L}(k+1) = \max(x_{AS-L}(k) + t_{AS-Z}, x_{Z-L}(k) + i_3) \quad (9)$$

Výše uvedený systém lineárních rovnic zajišťující synchronizaci linek MHD je možné přepsat do rovnic Max-plus algebry.

$$x_{AS-L}(k+1) = (x_{AS-L}(k) \otimes i_3) \oplus (x_{Z-L}(k) \otimes t_{Z-AS}) \quad (10)$$

$$x_{D-N}(k+1) = (x_{D-N}(k) \otimes i_2) \oplus (x_{T-L}(k) \otimes t_{T-D}) \quad (11)$$

$$x_{N-D}(k+1) = (x_{N-D}(k) \otimes i_2) \oplus (x_{PZ-AS}(k) \otimes t_{PZ-N}) \oplus (x_{T-L}(k) \otimes t_{T-N}) \quad (12)$$

$$x_{N-L}(k+1) = (x_{D-N}(k) \otimes t_{D-N}) \oplus (x_{N-L}(k) \otimes i_1) \oplus (x_{PZ-AS}(k) \otimes t_{PZ-N}) \quad (13)$$

$$x_{L-AS}(k+1) = (x_{L-AS}(k) \otimes i_3) \oplus (x_{T-L}(k) \otimes t_{T-L}) \oplus (x_{Z-L}(k) \otimes t_{Z-L}) \quad (14)$$

$$x_{L-T}(k+1) = (x_{AS-L}(k) \otimes t_{AS-L}) \oplus (x_{D-N}(k) \otimes t_{D-L}) \oplus (x_{L-T}(k) \otimes i_2) \quad (15)$$

$$x_{PZ-AS}(k+1) = (x_{N-L}(k) \otimes t_{N-PZ}) \oplus (x_{PZ-AS}(k) \otimes i_1) \quad (16)$$

$$x_{T-L}(k+1) = (x_{D-N}(k) \otimes t_{D-T}) \oplus (x_{T-L}(k) \otimes i_2) \quad (17)$$

$$x_{Z-L}(k+1) = (x_{AS-L}(k) \otimes t_{AS-Z}) \oplus (x_{Z-L}(k) \otimes i_3) \quad (18)$$

Problematickou je otázka stanovení počátečních odjezdů. Při modelování synchronizace tří linek MHD Prostějov byla ke stanovení počátečních odjezdů využita hodnota vlastního vektoru  $\lambda$  matice  $A$  (21) zjištěná vztahem (19).

$$A \otimes z(k) = \lambda \otimes z(k) \quad (19)$$

Ke stanovení následných odjezdů byl využit vztah (20).

$$z(k+1) = A \otimes z(k) \quad (20)$$

### 3.2 Sestavení matematického modelu synchronizace linek MHD Prostějov

Vybraná část dopravní sítě MHD Prostějov je tvořena třemi linkami, které jsou vždy obsluhovány jedním vozidlem. Na každé lince jsou definovány linkové intervaly (Tab. 1) a jízdní doby mezi zastávkami (Tab. 2).

Tab. 1 - Linkové intervaly

Číslo linky	Linkový interval na lince l [min]
Linka 1	56
Linka 2	58
Linka 3	46

Zdroj: Autor

Tab. 2 - Jízdní doby mezi zastávkami

Úsek mezi $i$ -tou a $j$ -tou zastávkou	Jízdní doba mezi $i$ -tou a $j$ -tou zastávkou [min]	Úsek mezi $i$ -tou a $j$ -tou zastávkou	Jízdní doba mezi $i$ -tou a $j$ -tou zastávkou [min]
AS-L	6	L-Z	12
AS-PZ	11	N-D	10
D-N	10	N-L	6
L-AS	6	PZ-AS	11
L-N	6	T-L	8
L-T	8	Z-L	12

Zdroj: Autor

### 3.3 Stanovení odjezdů spojů ze zastávek MHD Prostějov

Na základě hodnot vstupních údajů dosazených do rovnic Max-plus algebry (10) až (18), kterými se modelovala synchronizace linek MHD, byla sestavena matice  $A$  (21).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} NL & PZAS & DN & LT & ND & TL & ASL & LAS & ZL \end{matrix} \\ \begin{matrix} ASL \\ DN \\ ND \\ NL \\ LAS \\ LT \\ PZAS \\ TL \\ ZL \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 46 & -\infty & 18 \\ -\infty & -\infty & 58 & -\infty & -\infty & 24 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 23 & -\infty & -\infty & 58 & 14 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 56 & 23 & 10 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 8 & -\infty & 46 & 12 \\ -\infty & -\infty & 16 & 58 & -\infty & -\infty & 6 & -\infty & -\infty \\ 23 & 56 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 24 & -\infty & -\infty & 58 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 18 & -\infty & 46 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (21)$$

Následně byl pro matici  $A$  zjišťován vlastní vektor a vlastní číslo. Vlastní vektor byl zjišťován za účelem stanovení počátečních odjezdů ze zastávek MHD a vlastní číslo bylo zjišťováno za účelem stanovení odjezdů ze zastávek MHD, při kterých bude opět dosaženo počátečních odjezdů.

Použitím vlastního čísla byly dále zjišťovány každé následné odjezdy ze zastávek MHD, čímž byly získány hodnoty odjezdů mezi počátečními odjezdy a opakovanými počátečními odjezdy.

### 3.4 Stanovení vlastního čísla a vlastního vektoru

Hodnota vlastního čísla a vlastního vektoru byla stanovena v software Scilab prostřednictvím příkazu  $[l, v, d] = \text{maxplusmaxalgol}(A)$ , přičemž jednotlivé prvky uvedeného příkazu mají následující význam:

$l$  - vlastní číslo matice  $A$ ,

$v$  - vlastní vektor matice  $A$ ,

$d$  - pozitivní celé číslo, které představuje délku cyklu vektorů matice  $A$ .

Stanovení vlastního čísla a vlastního vektoru matice  $A$  v software Scilab:

```
-->s=maxplusscg(A)
```

```
s =
```

```
T
```

```
-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(A)
```

```
d =
```

```
8.
```

```
v =
```

```
599.5, 606.5, 603, 601, 599.5, 604.5, 608, 608, 571.5
```

```
l =
```

```
54.5
```

### 3.5 Stanovení následných odjezdů

Časy následných odjezdů ze zastávek MHD v časovém úseku, který odpovídá hodnotě vlastního čísla, byly stanoveny v software Scilab prostřednictvím příkazu  $[X] = \text{maxplussys}(A, x0, p)$ , přičemž jednotlivé prvky uvedeného příkazu mají následující význam:

$A$  - matice  $A$ ,

$x0$  - počátek vektor,

$p$  - vlastní číslo.

Stanovení následných odjezdů v rámci vlastního čísla matice  $A$  v software Scilab:

```
-->x0=[600;607;603;601;600;605;608; 608;572];
```

```
-->p=55;
```

```
-->[X]=maxplussys(A,x0,p)
```

Získané hodnoty synchronizovaných odjezdů jsou uvedené v Tab. 3. V levé části tabulky jsou uvedené časy příjezdů spojů do přestupní zastávky Lázně a v pravé části časy odjezdů navazujících spojů z této zastávky.

Tab. 3 - Synchronizované odjezdy ze zastávky Lázně

Relace	Příjezd	Relace	Odjezd
TESCO – Lázně – aut. st.			
TESCO - Lázně	5:16	Lázně - aut.st.	5:38
	6:11		6:33
	7:05		7:27
	8:00		8:22
aut.st. - Lázně	5:06	Lázně - TESCO	5:23
	6:00		6:17
	6:55		7:12
	7:49		8:06
Domamyslice – Lázně – aut.st.			
Domamyslice - Lázně	5:23	Lázně - aut.st.	5:38
	6:17		6:33
	7:12		7:27
	8:06		8:22
aut.st. - Lázně	5:06	Lázně - Domamyslice	5:16
	6:00		6:11
	6:55		7:05
	7:49		8:00

Zdroj: Autor

V důsledku zrušení vybraných linek dojde ve výše uvedených relacích k prodloužení času přepravy cestujících. Získané doby čekání jsou v rozpětí od 10 do 22 minut. Uvedené výsledky jsou dány skutečností, že je uvažován případ, kdy jsou spoje synchronizovaných



linek obsluhovány pouze jedním vozidlem. V dalších experimentech bude pozornost věnována zohlednění většího počtu vozidel na linkách a snížení doby čekání.

## ZÁVĚR

V článku bylo prezentováno modelování synchronizace odjezdů spojů vybraných linek MHD Prostějov prostřednictvím Max-plus algebry, která představuje perspektivní přístup k řešení optimalizačních problémů, protože umožňuje prostřednictvím poměrně jednoduchých rovnic řešit složité optimalizační úlohy. Ke stanovení odjezdů spojů z vybraných zastávek MHD Prostějov, které se po určité době opakují, byl použit matematický program Scilab určený pro numerické výpočty (7).

*Článek byl zpracován s podporou grantu Fakulty strojní VŠBTU Ostrava č. SP2011/129  
Výzkum v oblasti modelování pro podporu řízení dopravy ve městech.*

## POUŽITÁ LITERATURA

- (1) ČERNÝ, J., KLUVÁNEK, P. *Základy matematickej teórie dopravy*. Bratislava: VEDA, 1991. 279 s. ISBN 80-224-0099-8.
- (2) BURKARD, R. E., BUTKOVIČ P. *Max algebra and the linear assignment problem*. 2003.
- (3) ANDERSEN, M. H. *Max-plus algebra: properties and application*. 2002.
- (4) BACELLI, F., COHEN, G., OLSDER, G. J., QUADRAT, J. P. *Synchronization and Linearity*. 2001.
- (5) *Studie městské hromadné dopravy města Prostějova včetně komplexní dopravní obslužnosti průmyslové zóny*. UDIMO spol s. r. o., 2007.
- (6) TUREK, R. *Matematické modelování vybraných problémů MHD Prostějov – diplomová práce VŠB-TUO*, 68 s.
- (7) *Scilab*. Dostupné z <<http://www.scilab.org>>.