

APLIKACE MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ PŘI NÁVRHU STRUKTURY DISTRIBUČNÍHO SYSTÉMU

APPLICATION OF MATHEMATICAL PROGRAMMING IN DESIGNING THE STRUCTURE OF THE DISTRIBUTION SYSTEM

Martin Ivan¹

Anotace: Prezentovaný článek se zabývá aplikací matematického programování při návrhu struktury distribučního systému. Příspěvek je rozdělen do tří částí. Úvodní část se zabývá teoretickými východisky a přiblížení dané problematiky. Následující část je věnována jednotlivým modelům a jejich podrobnému popisu. V závěru jsou uvedeny softwarové produkty pro řešení této problematiky.

Klíčová slova: distribuční systém, účelová funkce, proměnné, omezující podmínky.

Summary: The presented paper deals with the application of a mathematical programming in designing the structure of the distribution system. This paper is divided into three parts. The introductory part deals with theoretical starting points and approach of issue. The next section is devoted to individual states models and detailed description. Finally are given the software products to address this issue.

Key words: distribution system, special-purpose functions, variables, limiting conditions.

1. ÚVOD

Distribuční systémy obecně se zabývají činnostmi souvisejícími s materiálovými toky a navazující komisionářskou činností. Tuto část logistického systému je možno chápat jako spojovací článek mezi výrobou a spotřebiteli. Jedním z hlavních úkolů distribučních systémů je dodat zákazníkovi požadované zboží při co nejvyšší efektivitě. Při plánování distribuce zboží se tedy v podstatě jedná o vytvoření optimálního poměru mezi dodacími službami, které je schopen podnik nabídnout nebo které konečný zákazník požaduje a vznikajícími náklady. Analogicky může být rozhodováno v situacích, kdy se má rozhodovat o reorganizaci již provozovaného distribučního systému. Při vytváření (reorganizaci) distribučního systému je třeba vydat určitá rozhodnutí, na nichž je pochopitelně závislá i celková efektivita systému. Efektivita distribučního systému se zpravidla vyjadřuje prostřednictvím nákladů na zajištění

¹ Ing. Martin Ivan, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava – Poruba, Tel.: 597 325 755, E-mail: martin.ivan.st@vsb.cz

chodu systému, tzn. nebude-li chod systému vhodně zorganizován, budou náklady na zajištění chodu systému vyšší, než je nezbytně nutné, což má pochopitelně na efektivitu daného systému přímý dopad. Pro podporu správného rozhodování existuje v současnosti celá řada metod, jednou z nejvýznamnějších skupin podpůrných metod jsou metody matematického programování. Matematické programování se zabývá problematikou vytváření matematických modelů rozhodovacích problémů a jejich řešením. Základem celého řešícího procesu metodami matematického programování je správně fungující matematický model.

2. MATEMATICKÝ MODEL DISTRIBUČNÍHO SYSTÉMU

V této kapitole bude pozornost věnována tvorbě matematického modelu distribučního systému. K řešení bude použito metod lineárního programování. Je to proto, že v lineárním programování je díky existenci univerzálních řešících metod možno řešit různé typy rozhodovacích úloh, přičemž jejich rozsahy mohou být značné, viz [1]. V dalším textu bude dále pozornost věnována jednomu typu distribučního systému, systému, ve kterém distribuce zboží probíhá kyvadlovými jízdami. Dalším typům distribučních systémů bude pozornost věnována v některém z dalších čísel tohoto časopisu.

Při tvorbě lineárních matematických modelů bylo vycházeno ze základních doporučení publikovaných v [2] nebo [3].

Postup sestavy matematického modelu distribučního systému je závislý na celé řadě faktorů. Jednak je to soupis omezení, která je třeba v reálném chodu distribučního systému dodržovat, důležitým aspektem při formulaci matematického modelu je formulace optimalizačního kritéria. V kontextu skutečností uvedených dosud budou také v předloženém příspěvku modely uspořádány. Publikované modely budou pro potřeby předloženého článku rozděleny následovně:

- a) základní varianta distribučního systému,
- b) modely v rozšířené variantě s nutností zásobování zákazníků přes mezisklady - bez možnosti přímého zásobování konečných zákazníků z primárního zdroje (dále jen PZ),
- c) modely v rozšířené variantě s kombinací možnosti přímého zásobování zákazníků z PZ a možnosti zásobování zákazníků prostřednictvím meziskladů.

Dále se u každého typu problému předpokládá existence minimálně jednoho přípustného řešení. Je zapotřebí uvést, že všechny hodnoty vstupních údajů se uvažují ke stejnému časovému období, v předloženém článku to bude období jednoho roku.

V následujícím textu budou jednotlivé varianty modelů distribučních systémů podrobněji popsány [4].

2.1. Základní varianta distribučního systému

Základní varianta distribučního systému představuje přímou distribuci mezi PZ a jednotlivými konečnými zákazníky. Pro sestavení matematického modelu je třeba mít k dispozici následující vstupní informace:

- polohu PZ a polohy zákazníků v dopravní síti,
- požadavky konečných zákazníků za zvolené časové období,
- vzdálenosti mezi PZ a jednotlivými konečnými zákazníky,
- kapacita vozidla provádějícího obsluhu zákazníků (pro zjednodušení je uvažován homogenní vozidlový park z hlediska kapacity).

Rekapitulace vstupních hodnot:

J	množina konečných zákazníků	
d_{0j}	vzdálenost z PZ ke konečnému zákazníkovi $j \in J$	[km]
b_j	požadavek konečného zákazníka $j \in J$	[$oj \cdot rok^{-1}$]
k_1	kapacita vozidla obsluhujícího relace PZ – koneční zákazníci	[oj]
c_1	náklady na ujetí vzdálenosti jednoho kilometru vozidlem s kapacitou k_1	[$pj \cdot km^{-1}$]

kde zkratkou oj jsou vyjádřeny objemové jednotky zboží, zkratkou pj peněžní jednotky.

V případě základní varianty distribučního systému je rozhodování triviální, matematický model, jako takový, není zapotřebí sestavovat. Množina přípustných řešení obsahuje jedno řešení, které je zároveň optimálním řešením. Hodnota účelové funkce - roční náklady na provoz distribučního systému se vypočítá ze vztahu (1):

$$f(x) = \sum_{j \in J} c_1 \cdot d_{0j} \cdot \frac{b_j}{k_1} \quad (1)$$

Při uvedeném způsobu rozhodování není třeba vytvářet soustavu omezujících podmínek. Je zřejmé, že všichni koneční zákazníci budou zásobováni (tedy přiřazeni) z PZ. Další typy rozhodnutí se v úloze nevyskytují.

V současné době se tento způsob distribuce vyskytuje v případech, kdy je z hlediska vynaložených ročních finančních nákladů na provoz distribučního systému výhodnější provádět přímou distribuci. Volba základní varianty distribučního systému tak přichází v úvahu zejména v případech, kdy nejsou koneční zákazníci, příliš prostorově rozptýleni vztahem k poloze PZ.

Matematické modelování distribučních systémů, ve kterých se uvažuje s vybudováním meziskladů, je poněkud složitější. V některých případech však může být rozhodování o volbě základní varianty distribučního systému diskutabilní (zejména máme-li možnost vybudovat mezisklady). Podrobnosti o způsobu rozhodování pro tyto případy budou uvedeny v souvislosti s rozšířenou variantou distribučního systému obsahující kombinaci možností přímého zásobování a zásobování prostřednictvím meziskladu.

2.2. Rozšířená varianta distribučního systému s nutností zásobování zákazníků přes mezisklady (bez možnosti přímého zásobování konečných zákazníků z PZ)

Je druhou variantou způsobu zásobování zákazníků. Při tvorbě matematického modelu uvedeného typu je třeba ve srovnání se základní variantou uvažovat s dalšími vstupními informacemi:

- polohy lokalit, v nichž se rozhoduje o možnosti umístění meziskladu;
- kapacita meziskladu za určité časové období, bude-li v dané lokalitě vybudován;
- vzdálenosti mezi všemi místy rozhodujícími z hlediska struktury distribučního systému (PZ, lokalitami, s nimiž se uvažuje pro vybudování skladu a konečnými zákazníky);
- náklady související s provozem meziskladu;
- kapacity vozidel (je-li uvažováno s vozidly více typů);
- náklady na ujetí vzdálenosti jednoho kilometru jednotlivými typy vozidel.

Rekapitulace vstupních hodnot:

I	množina lokalit, ve kterých se uvažuje s vybudováním meziskladů	
J	množina konečných zákazníků	
d_{0i}	vzdálenost z PZ do lokality $i \in I$	[km]
d_{ij}	vzdálenost z lokality $i \in I$ ke konečnému zákazníkovi $j \in J$	[km]
f_i	roční náklady na provoz meziskladu $i \in I$	[pj · rok ⁻¹]
b_j	roční požadavek konečného zákazníka $j \in J$	[oj · rok ⁻¹]
q_i	kapacita meziskladu, bude-li vybudován v lokalitě $i \in I$	[oj]
k_1	kapacita vozidla obsluhujícího relace PZ - meziskladem	[oj]
k_2	kapacita vozidla obsluhujícího relace meziskladu – koneční zákazníci	[oj]
c_1	náklady na ujetí vzdálenosti jednoho kilometru vozidlem s kapacitou k_1	[pj · km ⁻¹]
c_2	náklady na ujetí vzdálenosti jednoho kilometru vozidlem s kapacitou k_2	[pj · km ⁻¹]

V řešené variantě již není rozhodování tak triviální, jak tomu bylo v základní variantě. Pro potřeby rozhodování je zapotřebí zavést do úlohy proměnné, kterými budou jednotlivá rozhodnutí modelována. V rámci řešené varianty je zapotřebí provést rozhodnutí dvojího typu – ve kterých lokalitách budou vybudovány mezisklady a jakým způsobem budou těmto lokalitám přiřazeni koneční zákazníci. V úloze tedy naleznou uplatnění dvě skupiny proměnných:

x_{ij}	bivalentní proměnná modelující rozhodnutí, zda bude či nebude konečný zákazník $j \in J$ přiřazen lokalitě $i \in I$
----------	--

y_i bivalentní proměnná modelující rozhodnutí, zda bude či nebude v lokalitě $i \in I$ vybudován mezisklad

V souladu s obecně uznávanou konvencí bude hodnota 1 odpovídat kladnému rozhodnutí a hodnota 0 zápornému rozhodnutí. Tj. bude-li platit $x_{ij} = 0$, konečný zákazník $j \in J$ nebude přiřazen lokalitě $i \in I$, bude-li platit $x_{ij} = 1$, konečný zákazník $j \in J$ bude přiřazen lokalitě $i \in I$. Analogicky, bude-li platit $y_i = 0$, v lokalitě $i \in I$ nebude vybudován mezisklad, bude-li platit $y_i = 1$, v lokalitě $i \in I$ bude vybudován mezisklad.

Při uvažované rozšířené variantě již musí být vytvořen matematický model obsahující účelovou funkci a soustavu omezujících podmínek. Hodnota účelové funkce musí reprezentovat celkové náklady související s provozem distribučního systému. Omezující podmínky musí zajistit:

- jednoznačnost přiřazení konečného zákazníka $j \in J$ lokalitě $i \in I$,
- nepřekročení kapacity meziskladu v lokalitě $i \in I$,
- korektní provázanost rozhodnutí modelovaných proměnnými x_{ij} a y_i ,
- obligatorní podmínky.

Matematický model rozšířené varianty distribučního systému s nutností zásobování zákazníků přes mezisklady má tvar:

$$\min f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i \cdot y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_1 \cdot d_{0i} \cdot \frac{b_j}{k_1} + c_2 \cdot d_{ij} \cdot \frac{b_j}{k_2}) \cdot x_{ij} \quad (2)$$

za podmínek

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro všechna } j \in J \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} b_j \cdot x_{ij} \leq q_i \quad \text{pro všechna } i \in I \quad (4)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro všechna } i \in I, j \in J \quad (5)$$

Existuje i ekvivalentní tvar omezující podmínky (5)

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq n y_i \quad \text{pro všechna } i \in I, \quad \text{kde } n \geq |J| \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro všechna } i \in I, j \in J \quad (7)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pro všechna } i \in I \quad (8)$$

Funkce (2) reprezentuje účelovou funkci. Omezující podmínky (3), jejichž počet v modelu odpovídá počtu zákazníků, zajistí, že každý zákazník $j \in J$ bude přiřazen právě jedné lokalitě $i \in I$. Omezující podmínky (4), jejichž počet v modelu odpovídá počtu lokalit, zajistí, že kapacita skladu (bude-li vybudován) v žádné lokalitě $i \in I$ nebude překročena. Omezující podmínky (5) a (6) jsou vzájemně zastupitelné a zajišťují, že pokud nebude v lokalitě $i \in I$

vybudován sklad, nebude této lokalitě přiřazen žádný zákazník $j \in J$ a pokud bude lokalitě $i \in I$ přiřazen zákazník $j \in J$, bude v této lokalitě vybudován sklad. Počty omezujících podmínek (5) a (6) jsou různé. Počet omezujících podmínek (5) odpovídá součinu počtu lokalit a počtu zákazníků, počet omezujících podmínek (6) odpovídá počtu lokalit. Omezující podmínky (7) a (8) jsou obligatorní podmínky. Počet podmínek (7) odpovídá součinu počtu lokalit a počtu zákazníků, počet omezujících podmínek (8) odpovídá počtu lokalit.

2.3. Rozšířená varianta distribučního systému s kombinací přímého zásobování z PZ a prostřednictvím meziskladů

Poslední varianta distribučního systému, které bude v předloženém článku věnována pozornost, je kombinací obou předchozích možností. Na základě tohoto matematického modelu lze zjistit, zda je výhodnější provádět obsluhu konečných zákazníků $j \in J$ přímo z PZ, nebo realizovat zásobování zákazníků $j \in J$ přes mezisklady, či oba způsoby vzájemně kombinovat. Jedná se tedy o nejobecnější ze všech tří variant. Vychází se z obou předchozích modelů, které je třeba doplnit o další vstupní informace, jako jsou:

- vzdálenosti mezi PZ a jednotlivými konečnými zákazníky $j \in J$;
- náklady na přepravu jedné jednotky zboží mezi PZ a konečným zákazníkem $j \in J$, na jeden kilometr;
- určení typu vozidla, které bude přímé zásobování konečných zákazníků z PZ provádět (v dalším textu se uvažuje, že přímé zásobování bude provádět právě jeden typ vozidla, a to vozidlo s kapacitou k_1).

Rekapitulace vstupních hodnot:

I	množina lokalit, ve kterých se uvažuje s vybudováním skladů doplněná o PZ (PZ je přiřazen index 0)	
J	množina zákazníků	
d_{0i}	vzdálenost z PZ do lokality $i \in I$	[km]
d_{ij}	vzdálenost z lokality $i \in I$ ke konečnému zákazníkovi $j \in J$	[km]
f_i	roční náklady na provoz meziskladu $i \in I$	[$p_j \cdot \text{rok}^{-1}$]
b_j	roční požadavek konečného zákazníka $j \in J$	[$o_j \cdot \text{rok}^{-1}$]
q_i	kapacita meziskladu, bude-li vybudován v lokalitě $i \in I$	[o_j]
k_1	kapacita vozidla obsluhujícího relace PZ - meziskladem	[o_j]
k_2	kapacita vozidla obsluhujícího relace mezisklady – koneční zákazníci	[o_j]
c_1	náklady na ujetí vzdálenosti jednoho kilometru vozidlem s kapacitou k_1	[$p_j \cdot \text{km}^{-1}$]
c_2	náklady na ujetí vzdálenosti jednoho kilometru vozidlem s kapacitou k_2	[$p_j \cdot \text{km}^{-1}$]
e_{0j}	vzdálenost PZ od konečného zákazníka $j \in J$	[km]

Soustava proměnných bude totožná jako v případě rozšířené varianty (b), ve srovnání s touto variantou však přibudou do úlohy proměnné modelující rozhodnutí, zda bude či nebude konečný zákazník zásobován přímo z primárního zdroje. Proměnné modelující uvedené typ rozhodnutí budou tedy:

x_{0j} bivalentní proměnná modelující, zda bude či nebude konečný zákazník $j \in J$ zásobován z PZ,

$x_{0j}=1$ konečný zákazník $j \in J$ bude zásobován z PZ,

$x_{0j}=0$ konečný zákazník $j \in J$ nebude zásobován z PZ.

Matematický model při variantě (c) se od matematického modelu při variantě (b) bude lišit jak v účelové funkci, tak v soustavě omezujících podmínek, konkrétněji v podmínkách zajišťujících jednoznačné přiřazení každého zákazníka jednomu stanovišti, odkud bude zásobován.

Hodnota účelové funkce musí i při variantě (c) reprezentovat celkové náklady související s provozem distribučního systému. Omezující podmínky musí zajistit:

- jednoznačnost přiřazení konečného zákazníka $j \in J$ lokalitě $i \in I$,
- nepřekročení kapacity meziskladu v lokalitě $i \in I$,
- korektní provázanost rozhodnutí modelovaných proměnnými x_{ij} a y_i ,
- obligatorní podmínky.

Matematický model rozšířené varianty distribučního systému obsahující jak možnosti zásobování zákazníků přes mezisklady, tak i možnosti přímého zásobování, má tvar:

$$\min f(x, y) = \sum_{j \in J} c_1 \cdot e_{0j} \cdot \frac{b_j}{k_1} \cdot x_{0j} + \sum_{i \in I - \{0\}} f_i \cdot y_i + \sum_{i \in I - \{0\}} \sum_{j \in J} (c_1 \cdot d_{0i} \cdot \frac{b_j}{k_1} + c_2 \cdot d_{ij} \cdot \frac{b_j}{k_2}) \cdot x_{ij} \quad (9)$$

za podmínek

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro všechna } j \in J \quad (10)$$

$$\sum_{j \in J} b_j \cdot x_{ij} \leq q_i \quad \text{pro všechna } i \in I - \{0\} \quad (11)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro všechna } i \in I - \{0\}; j \in J \quad (12)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq n \cdot y_i \quad \text{pro všechna } i \in I - \{0\}, \text{ kde } n \geq |J| \quad (13)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro všechna } i \in I; j \in J \quad (14)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pro všechna } i \in I - \{0\} \quad (15)$$

Funkce (9) reprezentuje účelovou funkci. Omezující podmínky (10), jejichž počet v modelu odpovídá počtu zákazníků, zajistí, že každý zákazník $j \in J$ bude přiřazen právě jedné lokalitě $i \in I$, ve které může být vybudován sklad nebo PZ. Omezující podmínky (11), jejichž počet v modelu odpovídá počtu lokalit, zajistí, že kapacita skladu (bude-li vybudován) v žádné lokalitě $i \in I$ nebude překročena. Omezující podmínky (12) a (13) jsou, analogicky jako v případě varianty (b), vzájemně zastupitelné a zajišťují, že pokud nebude v lokalitě $i \in I - \{0\}$ vybudován sklad, nebude této lokalitě přiřazen žádný zákazník $j \in J$ a pokud bude lokalitě $i \in I - \{0\}$ přiřazen zákazník $j \in J$, bude v této lokalitě vybudován sklad. Počty omezujících podmínek (5) a (6) jsou různé. Počet omezujících podmínek (12) odpovídá součinu počtu lokalit a počtu zákazníků, počet omezujících podmínek (13) odpovídá počtu lokalit. Omezující podmínky (14) a (15) jsou obligatorní podmínky. Počet podmínek (14)

odpovídá součinu počtu lokalit rozšířeného o primární zdroj a počtu zákazníků, počet omezujících podmínek (8) odpovídá počtu lokalit.

Rozšířené varianty (b) a (c) je pochopitelně možné podle potřeby rozšiřovat o další doplňující omezení. Příkladem může být omezení, které má zajistit, že náklady na provoz skladů nepřekročí finanční limit, který má provozovatel systému k dispozici. V případě varianty (b) by byl model doplněn o podmínku (16)

$$\sum_{i \in I} f_i \cdot y_i \leq F \quad (16)$$

ve které symbol F reprezentuje disponibilní náklady, které má provozovatel vyčleněny na provozování skladů. V případě varianty (c) by podmínka (16) přešla do tvaru (17).

$$\sum_{i \in I - \{0\}} f_i \cdot y_i \leq F \quad (17)$$

3. ZÁVĚR

Uvedený článek je věnován tvorbě tří variant matematických modelů umožňujících efektivní návrh struktury distribučního systému. Při tvorbě matematických modelů je třeba znát určité vstupní informace a následně je vhodně popsat. Dalším krokem je sestavení účelové funkce, která v souvislosti s tvorbou distribučního systému představuje roční náklady na provoz celého systému. Při řešení sestavených matematických modelů jsou pak tyto náklady minimalizovány. Po sestavení účelové funkce je třeba do modelu doplnit omezující podmínky, jejichž účelem je vymezit množinu přípustných řešení úlohy. K řešení navržených modelů lze využít různé software jako např. MS Excel nebo Xpress-IVE.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JANÁČEK, J. *Matematické programování*. Žilina: Žilinská univerzita, 2003. 225 s. ISBN 80-8070-054-0.
- [2] JANÁČEK, J. *Optimalizace na dopravní síti*. Žilina: Žilinská univerzita, 2003. 248 s. ISBN 80-8070-031-1.
- [3] TEICHMANN, D. *Matematický model jednokomoditního dvoustupňového distribučního systému bez kapacitních omezení meziskladů* [online]. Poslední revize 4. 1. 2010 [cit. 2008-12-19]. Dostupné z: <<http://www.id.vsb.cz/zdvihacizarizeni/default.htm>>.
- [4] IVAN, M. *Aplikace matematického modelu při návrhu optimální struktury distribučního systému*. Písemná práce k doktorské zkoušce z předmětu Teorie dopravy.